Examen Parcial 2: Algebra Lineal

Alejandro Kunold
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
(Dated: 30 de junio de 2011)

1. Indica cuales de los axiomas de un espacio vectorial se cumplen para los vectores de la forma $(1, a)$ donde a es un número real arbitrario.

   a) si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ pertenecen a V entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ también pertenece a V ✖

   b) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ ✔

   c) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ ✔

   d) Hay un elemento $\mathbf{0}\in V$ tal que $\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ ✖

   e) Para toda $\boldsymbol{u}\in V$ hay una $(-\boldsymbol{u})\in V$ tal que $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$ ✖

   f) Si k es un escalar entonces $k\boldsymbol{u}\in V$ ✖

   g) $k(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{v}+k\boldsymbol{u}$ ✔

   h) $(k+s)\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{u}+s\boldsymbol{u}$ ✔

   i) $k(s\boldsymbol{u})=(ks)\boldsymbol{u}$ ✔

   j) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ ✔

2. Indica si los vectores $(1,3,-1)$, $(2,1,-5)$ y $(4,7,-7)$ son linealmente independientes.

   Solución: NO son linealmente independientes ya que

   $$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & -5 & -7 \end{pmatrix}=0 \tag{1}$$

3. Considera el conjunto W de vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^2$ cuya primera entrada es cero, es decir, son de la forma $(0, a)$ donde a es un número real arbitrario. ¿Este tipo de vectores forman un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

   Solución: SI ya que

   a) $(0,a_1)+(0,a_2)=(0,a_1+a_2)$ que también es del mismo tipo.

   b) $k(0,a)=(0,ka)$ que también es del mismo tipo.

4. Considera el siguiente conjunto de vectores $S=\{(1,-1),(0,1)\}$ y responde.

   a) ¿Es S una base de $\mathbb{R}^2$. Recuerda que para responder esto tienes que decir si los vectores son linealmente independientes y si generan a $\mathbb{R}^2$.

   Solución: SI ya que

   1) los dos vectores son linealmente independientes

   $$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=1 \tag{2}$$

   2) Además, como tiene inversa

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   garantiza que podemos encontrar cualquier vector de la forma (a, b)

   b) Escribe el vector $\boldsymbol{v}=(2,1)$ en la base S, es decir escribe $\boldsymbol{v}_S$

   Solución: $\boldsymbol{v}_S=(2,3)$.

Examen Parcial 2: Algebra Lineal

Alejandro Kunold
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
(Dated: 30 de junio de 2011)

1. Indica cuales de los axiomas de un espacio vectorial se cumplen para los vectores de la forma $(0, a)$ donde a es un número real arbitrario.

   a) si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ pertenecen a V entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ también pertenece a V ✔

   b) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ ✔

   c) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ ✔

   d) Hay un elemento $\mathbf{0} \in V$ tal que $\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ ✔

   e) Para toda $\boldsymbol{u} \in V$ hay una $(-\boldsymbol{u})$ tal que $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$ ✔

   f) Si k es un escalar entonces $k\boldsymbol{u} \in V$ ✔

   g) $k(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{v}+k\boldsymbol{u}$ ✔

   h) $(k+s)\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{u}+s\boldsymbol{u}$ ✔

   i) $k(s\boldsymbol{u})=(ks)\boldsymbol{u}$ ✔

   j) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ ✔

2. Indica si los vectores $(1,3,-1)$, $(2,1,-5)$ y $(1,1,-1)$ son linealmente independientes.

   Solución: SI son linealmente independientes ya que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}=-6 \tag{1}$$

3. Considera el conjunto W de vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^2$ cuya segunda entrada es cero, es decir, son de la forma $(a,0)$ donde a es un número real arbitrario. ¿Este tipo de vectores forman un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

   Solución: SI ya que

   a) $(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0)$ que también es del mismo tipo.

   b) $k(a,0)=(ka,0)$ que también es del mismo tipo.

4. Considera el siguiente conjunto de vectores $S=\{(1,-1),(1,1)\}$ y responde.

   a) ¿Es S una base de $\mathbb{R}^2$. Recuerda que para responder esto tienes que decir si los vectores son linealmente independientes y si generan a $\mathbb{R}^2$.
   Solución: SI ya que
      1) los dos vectores son linealmente independientes

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=2 \tag{2}$$

      2) Además, como tiene inversa

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

      garantiza que podemos encontrar cualquier vector de la forma (a,b)

   b) Escribe el vector $\boldsymbol{v}=(2,1)$ en la base S, es decir escribe $\boldsymbol{v}_S$
   Solución: $\boldsymbol{v}_S=(1/2,3/2)$.