# Examen Parcial 3: Álgebra Lineal

Alejandro Kunold
*Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco*
(Dated: 16 de julio de 2011)

1. Determina si la siguiente base es ortonormal:

$$\boldsymbol{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad \boldsymbol{u}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Respuesta: Si es ortonormal ya que

$$\langle u_1, u_2\rangle = 0, \quad \langle u_1, u_1\rangle = 1, \quad \langle u_2, u_2\rangle = 1.$$

2. Encuentra una base ortonormal a partir de la siguiente base:

$$\boldsymbol{u}_1 = (0,3), \quad \boldsymbol{u}_2 = (2,5).$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \frac{\boldsymbol{u}_1}{|\boldsymbol{u}_1|} = \frac{(0,3)}{3} = (0,1) \\
\boldsymbol{v}_2 &= \frac{\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1|} = \frac{(2,5) - 5(0,1)}{|(2,5) - 5(0,1)|} \\
&= \frac{(2,0)}{2} = (1,0)
\end{aligned}$$

3. Determina si la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x,y) = (7x - 2y, x + 5y)$$

es lineal. Respuesta: Esta SI es una transformación lineal ya que

$$\begin{aligned}
T((a_1,b_1) + (a_2,b_2)) &= T(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\
&= (7[a_1 + a_2] - 2[b_1 + b_2], [a_1 + a_2] + 5[b_1 + b_2]) \\
&= (7a_1 + 7a_2 - 2b_1 - 2b_2, a_1 + a_2 + 5b_1 + 5b_2) \\
&= (7a_1 - 2b_1, a_1 + 5b_1) + (7a_2 - 2b_2, a_2 + 5b_2) \\
&= T(a_1,b_1) + T(a_2,b_2)
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
T(k(a,b)) = T(ka,kb) &= (7ka - 2kb, ka + 5kb) \\
&= k(7a - 2b, a + 5b) = kT(a,b)
\end{aligned}$$

4. Encuentra los valores propios y los vectores propios de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta: los valores propios son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 3$ y los vectores propios son

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

# Examen Parcial 3: Álgebra Lineal

Alejandro Kunold
*Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco*
(Dated: 16 de julio de 2011)

1. Determina si la siguiente base es ortonormal:

$$\boldsymbol{u}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad \boldsymbol{u}_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Respuesta: Si es ortonormal ya que

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0, \;\; \langle u_1, u_1 \rangle = 1, \;\; \langle u_2, u_2 \rangle = 1.$$

2. Encuentra una base ortonormal a partir de la siguiente base:

$$\boldsymbol{u}_1 = (2, 0), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1, 4).$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \frac{\boldsymbol{u}_1}{|\boldsymbol{u}_1|} = \frac{(2,0)}{2} = (1,0) \\
\boldsymbol{v}_2 &= \frac{\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1|} = \frac{(1,4) - 1\,(1,0)}{|(1,4) - 1\,(1,0)|} \\
&= \frac{(0,4)}{4} = (0,1)
\end{aligned}$$

3. Determina si la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (7x - 2y, -x + 8y))$$

es lineal. Respuesta: Esta SI es una transformación lineal ya que

$$\begin{aligned}
T\left((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\right) &= T\left(a_1 + a_2, b_1 + b_2\right) \\
&= \left(7\left[a_1 + a_2\right] - 2\left[b_1 + b_2\right], -\left[a_1 + a_2\right] + 8\left[b_1 + b_2\right]\right) \\
&= (7a_1 + 7a_2 - 2b_1 - 2b_2, -a_1 - a_2 + 8b_1 + 8b_2) \\
&= (7a_1 - 2b_1, -a_1 + 8b_1) + (7a_2 - 2b_2, -a_2 + 8b_2) \\
&= T\left(a_1, b_1\right) + T\left(a_2, b_2\right)
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
T\left(k\left(a, b\right)\right) = T\left(ka, kb\right) &= (7ka - 2kb, -ka + 8kb) \\
&= k\left(7a - 2b, -a + 8b\right) = kT\left(a, b\right)
\end{aligned}$$

4. Encuentra los valores propios y los vectores propios de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta: los valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$ y los vectores propios son

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$