Examen Global: Álgebra Lineal

Alejandro Kunold
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
(Dated: 26 de julio de 2011)

1^a **Parte:** Si reprobaste sólo el primer examen parcial debes hacer todos los incisos del problema 1.

2^a **Parte:** Si reprobaste sólo el segundo examen parcial debes hacer los problemas 2, 3, 4 y 5.

3^a **Parte:** Si reprobaste sólo el tercer examen parcial debes hacer los problemas 6, 7, 8 y 9.

Todo: Si reprobaste dos o más exámenes parciales tienes que hacer lo siguiente:

1. El problema 1 excepto el inciso 1b.
2. Los problemas 2, 4 y 5.
3. Los problemas 7, 8 y 9.

1. Intel planea sacar dos nuevos procesadores para computadoras portables: 1) el $i7$ de dos núcleos para computadoras portables con pantalla de 13 pulgadas y 2) el $i7$ de cuatro núcleos para computadoras portables con pantalla de 15 pulgadas. El primero tiene un costo de fabricación de 1 USD y el segundo de 2 USD. Por las condiciones del mercado sólo se fabricarán la mitad de computadoras de pantalla de 13 pulgadas que de 15 pulgadas. Si Intel piensa destinar 2000000 USD a la fabricación de estos dos procesadores ¿Cuántos procesadores de cada tipo debe fabricar? Para responder esta pregunta contesta los siguientes incisos:

   a) Plantea un sistema de ecuaciones que describa el problema anterior y exprésalo en forma matricial.
   Respuesta:
   $$x + 2y = 2000000 \tag{1}$$
   $$2x - y = 0 \tag{2}$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000000 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   b) Reduciendo el sistema de ecuaciones a la forma triangular superior o inferior encuentra la respuesta del problema: ¿Cuántos procesadores del tipo 1 y 2 debe fabricar Intel. Respuesta: Intel debe fabricar 400000 procesadores del primer tipo y 800000 del segundo.

   c) Calculando el determinante de la matriz contesta si el sistema tiene solución única o no. Respuesta: SI tiene solución única ya que
   $$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -5 \tag{4}$$

   d) Encuentra la matriz inversa.
   Respuesta:
   $$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \tag{5}$$

   e) Con la matriz inversa encuentra la solución: ¿Cuántos procesadores del tipo 1 y 2 debe fabricar Intel. Respuesta:
   $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} 2000000 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000000 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 400000 \\ 800000 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

2. Sin demostrar indica cuales de los axiomas de un espacio vectorial se cumplen para los vectores de $\mathbb{R}^2$ de la forma $(x, 2)$ donde x es un número real arbitrario.

   a) si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ pertenecen a V entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ también pertenece a V ✖
   b) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ ✔
   c) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ ✔
   d) Hay un elemento $\mathbf{0} \in V$ tal que $\boldsymbol{v}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ ✖
   e) Para toda $\boldsymbol{u} \in V$ hay una $(-\boldsymbol{u}) \in V$ tal que $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ ✖
   f) Si k es un escalar entonces $k\boldsymbol{u} \in V$ ✖
   g) $k(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = k\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{u}$ ✔
   h) $(k + s)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{u}$ ✔
   i) $k(s\boldsymbol{u}) = (ks)\boldsymbol{u}$ ✔
   j) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ ✔

3. Indica si los vectores $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 2)$ y $(1, 1, 1)$ son linealmente independientes.

   Solución: NO son linealmente independientes ya que
   $$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{7}$$

4. Considera el conjunto W de vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^2$ cuya segunda entrada es cero, es decir, son de la forma $(x, 0)$ donde x es un número real arbitrario. ¿Este tipo de vectores forman un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

   Solución: SI ya que

   a) $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ que también es del mismo tipo.

   b) $k(x, 0) = (kx, 0)$ que también es del mismo tipo.

5. Considera el siguiente conjunto de vectores $S = \{(1,1), (1,-1)\}$ y responde.

   a) ¿Es S una base de $\mathbb{R}^2$. Recuerda que para responder esto tienes que decir si los vectores son linealmente independientes y si generan a $\mathbb{R}^2$.
   Solución: SI ya que

   1) los dos vectores son linealmente independientes

   $$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \tag{8}$$

   2) Además, como tiene inversa

   $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

   garantiza que podemos encontrar cualquier vector de la forma (a, b)

   b) Escribe el vector $\boldsymbol{v} = (6, 6)$ en la base S, es decir escribe $\boldsymbol{v}_S$
   Solución: $\boldsymbol{v}_S = (6, 0)$.

6. Determina si la siguiente base es ortonormal:

   $$\boldsymbol{u}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad \boldsymbol{u}_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

   Respuesta: Si es ortonormal ya que

   $$\langle u_1, u_2 \rangle = 0, \;\; \langle u_1, u_1 \rangle = 1, \;\; \langle u_2, u_2 \rangle = 1.$$

7. Encuentra una base ortonormal a partir de la siguiente base:

   $$\boldsymbol{u}_1 = (2, 0), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1, -1).$$

   Respuesta:

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \frac{\boldsymbol{u}_1}{|\boldsymbol{u}_1|} = \frac{(2,0)}{2} = (1,0) \\ \boldsymbol{v}_2 &= \frac{\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1|} = \frac{(1,-1) - 1\,(1,0)}{|(1,-1) - 1\,(1,0)|} \\ &= \frac{(0,-1)}{1} = (0,-1) \end{aligned}$$

8. Determina si la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

   $$T(x, y) = (0, x + y)$$

   es lineal. Respuesta: Esta SI es una transformación lineal ya que

   $$\begin{aligned} T\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) &= T\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) \\ &= (0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ = T\left(x_1, y_1\right) + T\left(x_2, y_2\right) &= (0, x_1 + y_1) + (0, x_2 + y_2) \\ &= (0, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \end{aligned}$$

   y además

   $$\begin{aligned} T\left(k\left(x, y\right)\right) = T\left(kx, ky\right) &= (0, kx + ky) \\ &= k\left(0, x + y\right) = kT\left(x, y\right) \end{aligned}$$

9. Encuentra los valores propios y los vectores propios de la siguiente matriz:

   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Respuesta: los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$ y los vectores propios son

   $$\boldsymbol{v}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$