Tarea 2: Algebra Lineal

Alejandro Kunold
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
(Dated: 30 de junio de 2011)

1. Indica cuales de los axiomas de un espacio vectorial se cumplen para todos los polinomios de orden 2 (P_2) de la forma $1 + ax + bx^2$ donde a y b son números arbitrarios.

   Si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$ y k y s son escalares

   a) si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ pertenecen a V entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ también pertenece a V ✖
   b) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ ✔
   c) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ ✔
   d) Hay un elemento $\boldsymbol{0}\in V$ tal que $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ ✖
   e) Para toda $\boldsymbol{u}\in V$ hay una $(-\boldsymbol{u})\in V$ tal que $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ ✖
   f) Si k es un escalar entonces $k\boldsymbol{u}\in V$ ✖
   g) $k(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{v}+k\boldsymbol{u}$ ✔
   h) $(k+s)\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{u}+s\boldsymbol{u}$ ✔
   i) $(ks\boldsymbol{u})=ks\boldsymbol{s}$ ✔
   j) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ ✔

2. Considera el subconjunto W de vectores de $\mathbb{R}^4$ de la forma $(a,0,0,b)$, donde a y b son números reales arbitrarios.

   a) Determina si este conjunto de vectores es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

   Solución: Es un subespacio ya que cumple con que

   1) si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ pertenecen a W entonces también $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in W$
   2) si k es un escalar y $\boldsymbol{v}$ pertenece a W entonces también $k\boldsymbol{v}\in W$.

   b) Determina si el conjunto $S=\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\}$ donde $\boldsymbol{v}=(0,0,0,1)$ y $\boldsymbol{u}=(1,0,0,1)$ es una base de W. Recuerda que para esto tienes que demostrar en primer lugar que ambos vectores son linealmente independientes y si con estos dos vectores puedes generar W. Solución:

   1) Primero respondo si son linealmente independientes. $k_1\boldsymbol{v}+k_2\boldsymbol{u}=(k_2,0,0,k_1+k_2)=(0,0,0,0)$ implica que $k_2=0$ y que $k_1+k_2=0$ entonces $k_1=k_2=0$. Esto quiere decir que son linealmente independientes.
   2) Segundo demuestro que puedo generar cualquier vector de la forma $(a,0,0,b)$ a partir de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}$. Como $k_1\boldsymbol{v}+k_2\boldsymbol{u}=(k_2,0,0,k_1+k_2)=(a,0,0,b)$ me da lugar a dos equaciones:

   $$k_2 = a$$
   $$k_1 + k_2 = b$$

   que se pueden poner en forma matricial como

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (1)$$

   y la matriz tiene inversa dada por

   $$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

   entonces puedo generar cualquier vector de la forma $(a,0,0,b)$ a partir de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}$. Para esto hago

   $$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   y puedo averiguar cuanto vale k_1 y k_2 para cualquier vector $(a,0,0,b)$.

   c) Encuentra al vector $\boldsymbol{w}=(3,0,0,5)$ representado en la base S, es decir, encuentra a $\boldsymbol{w}_S$

   Respuesta: Del resultado del inciso anterior

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   entonces $\boldsymbol{w}_S=(k_1,k_2)=(2,3)$ ya que $2(0,0,0,1)+3(1,0,0,1)=(3,0,0,5)$