Tarea 3: Álgebra Lineal

Alejandro Kunold
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
(Dated: 21 de julio de 2011)

1. Determina si los siguientes vectores de P_2 forman una base ortonormal:

$$u_1 = 1, \;\; u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \;\; u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$$

Respuesta: Es una base ortonormal ya que

$$\begin{aligned} &\langle u_1, u_2\rangle = 0, \;\; \langle u_1, u_3\rangle = 0, \;\; \langle u_2, u_3\rangle = 0, \\ &\langle u_1, u_1\rangle = 1, \;\; \langle u_2, u_2\rangle = 1, \;\; \langle u_3, u_3\rangle = 1. \end{aligned}$$

2. Determina si los siguientes vectores de $M_{2\times 2}$ forman una base ortonormal:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \;\; u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ u_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \;\; u_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Respuesta: Es una base ortonormal ya que

$$\begin{aligned} &\langle u_1, u_2\rangle = 0, \;\; \langle u_1, u_3\rangle = \frac{3}{5}, \;\; \langle u_1, u_4\rangle = 0, \\ &\langle u_2, u_3\rangle = 0, \;\; \langle u_2, u_4\rangle = 0, \;\; \langle u_3, u_4\rangle = 0, \\ &\langle u_1, u_1\rangle = 1, \;\; \langle u_2, u_2\rangle = 1, \;\; \langle u_3, u_3\rangle = 1, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \langle u_4, u_4\rangle = 1. \end{aligned}$$

3. Encuentra una base ortonormal a partir de la base

$$\boldsymbol{u}_1 = (0,1,0), \quad \boldsymbol{u}_2 = (2,1,1), \quad \boldsymbol{u}_3 = (-1,1,1)$$

Respuesta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \frac{\boldsymbol{u}_1}{|\boldsymbol{u}_1|} = \frac{(0,1,0)}{1} = (0,1,0) \\ \boldsymbol{v}_2 &= \frac{\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1|} = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \boldsymbol{v}_3 &= \frac{\boldsymbol{u}_3 - \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2\rangle \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{u}_3 - \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1\rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2\rangle \boldsymbol{v}_2|} \\ &= \frac{\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5}\right)}{\frac{3}{\sqrt{5}}} = \frac{(-1,0,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

4. Identifica cual de las siguientes son transformaciones lineales:
   a) $T : \mathbb{R}^2 \to P_1$ dada por

$$T(a,b) = a^2 + bx$$

Respuesta: Esta NO es una transformación lineal ya que

$$\begin{aligned} &T((a_1,b_1) + (a_2,b_2)) \\ &\quad = T(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)x \\ &\qquad = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 + b_1x + b_2x \\ &\qquad = 2a_1a_2 + a_1^2 + b_1x + a_2^2 + b_2x \\ &\qquad = 2a_1a_2 + T(a_1,b_1) + T(a_2,b_2) \\ &\qquad\qquad \neq T(a_1,b_1) + T(a_2,b_2) \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} T(k(a,b)) &= T(ka,kb) = (ka)^2 + kbx \\ &= k\left(ka^2 + bx\right) = kT(ka,b) \neq kT(a,b) \end{aligned}$$

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x,y) = (3x + y, -5x + 4y).$$

Respuesta: Esta SI es una transformación lineal ya que

$$\begin{aligned} &T((a_1,b_1) + (a_2,b_2)) = T(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ &= (3[a_1 + a_2] + [b_1 + b_2], -5[a_1 + a_2] + 4[b_1 + b_2]) \\ &= (3a_1 + 3a_2 + b_1 + b_2, -5a_1 - 5a_2 + 4b_1 + 4b_2) \\ &= (3a_1 + b_1, -5a_1 + 4b_1) + (3a_2 + b_2, -5a_2 + 4b_2) \\ &\qquad = T(a_1,b_1) + T(a_2,b_2) \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} T(k(a,b)) &= T(ka,kb) = (3ka + kb, -5ka + 4kb) \\ &= k(3a + b, -5a + 4b) = kT(a,b) \end{aligned}$$

Recuerda que para que una transformación sea lineal tiene que cumplir que 1) $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ y 2) $T(k\boldsymbol{u}) = kT(k\boldsymbol{u})$.

5. Encuentra los valores propios y los vectores propios de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Respuesta: los valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 5$ y los vectores propios son

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$