

Campos I

---

*Alejandro Kunold*

Escrito con  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$

6 de abril de 2006



# Objetivos

1. Comprender el álgebra y análisis vectorial necesario para establecer un modelo matemático correspondiente a un fenómeno físico que se describa mediante un campo escalar o vectorial.
2. Comprender el álgebra vectorial en un espacio cartesiano tridimensional. Comprender y aplicar la definición de campos escalares y campos vectoriales en la descripción de distintos fenómenos físicos.
3. Definir la interpretación física de ciertos operadores diferenciales como lo son el gradiente, la divergencia, el rotacional y el Laplaciano .
4. Comprender los teoremas vinculados con los operadores diferenciales y el Teorema de Helmholtz.
5. Interpretar los resultados obtenidos del trabajo teórico por medio de herramientas computacionales como MatLab®, Mathematica®, C++®, Fortran® u otro software. Comunicar en forma oral y escrita los resultados y conclusiones obtenidos de sus tareas y sus experiencias con la computadora.



# Índice general

Objetivos	III
<b>1. Algebra Vectorial</b>	<b>5</b>
1.1. Objetivos Específicos	5
1.2. Escalares y vectores	5
1.3. Vectores unitarios. Cosenos directores	6
1.4. Multiplicación de un vector por un escalar	6
1.5. Suma de vectores	6
1.6. Producto interno. Producto punto	6
1.7. Producto vectorial. Producto cruz	7
1.8. Productos Múltiples	8
1.8.1. Producto $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$	8
1.8.2. Producto escalar triple $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$	8
1.8.3. Triple producto $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$	9
1.8.4. Cuádruple Producto $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$	9
1.9. Rotación de ejes cartesianos	9
1.9.1. Coordenadas cilíndricas circulares	12
1.9.2. Coordenadas esféricas	12
1.10. Invariancia de la norma de un vector ante rotación de ejes	13
<b>2. Derivación de Funciones Vectoriales</b>	<b>15</b>
2.1. Objetivos Específicos	15
2.2. Funciones escalares	15
2.3. Funciones vectoriales y su representación geométrica	15
2.4. Derivada y diferencial de una función vectorial	15
2.5. Reglas de derivación	16
2.6. Fórmula de Taylor para funciones vectoriales	17
2.7. Expresión analítica de las curvaturas de flexión y torsión	18
2.8. Fórmulas de Frenet	20
<b>3. Derivación de campos escalares y vectoriales</b>	<b>21</b>
3.1. Campos escalares	21
3.2. Campos vectoriales	21
3.3. Derivación parcial, regla de la cadena	22

3.4.	Gradiente de un campo escalar . . . . .	23
3.5.	Divergencia y rotacional de un campo escalar . . . . .	24
3.6.	Identidades básicas . . . . .	25
3.7.	Coordenadas curvilíneas ortogonales . . . . .	26
3.7.1.	Factores de escala . . . . .	26
3.7.2.	Diferenciales de volumen y superficie en coordenadas generalizadas. . . . .	28
3.7.3.	Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en coordenadas generalizadas . . . . .	29
3.7.4.	Coordenadas Cilíndricas . . . . .	34
<b>4.</b>	<b>Integración de Campos Escalares y Vectoriales</b>	<b>37</b>
4.1.	Integrales de línea . . . . .	37
4.2.	Campo escalar y campo vectorial conservativos . . . . .	37
4.3.	Campo vectorial irrotacional . . . . .	39
4.4.	Integrales de Superficie . . . . .	40
4.4.1.	Ejemplo de Integración de Superficie . . . . .	40
4.5.	Teorema de la divergencia . . . . .	44
4.5.1.	Ejemplo de Aplicación del Teorema de la Divergencia . . . . .	47
4.6.	Teorema de Green . . . . .	47
4.7.	Teorema de Stokes. Interpretación del rotacional . . . . .	47
4.8.	Campo vectorial solenoidal . . . . .	50
4.9.	Ecuación de Laplace . . . . .	52
4.10.	Potencial escalar y vectorial . . . . .	52
4.11.	Teorema de Helmholtz . . . . .	53
<b>5.</b>	<b>Tensores Cartesianos</b>	<b>55</b>
5.1.	Objetivos Específicos . . . . .	55
5.2.	Leyes de transformación tensorial . . . . .	55
5.3.	Operaciones algebraicas elementales . . . . .	55
5.3.1.	Producto y contracción. Convención de suma de Einstein . . . . .	55
5.3.2.	Suma . . . . .	56
5.3.3.	Producto . . . . .	56
5.3.4.	Simetría o antisimetría de un tensor . . . . .	56
5.4.	La delta de Kroneker y el tensor de Levi-Civita . . . . .	56
5.4.1.	Representación del producto punto . . . . .	57
5.4.2.	Representación del producto cruz . . . . .	57
5.5.	El operador nabla en terminos tensoriales . . . . .	58
5.5.1.	El gradiente de un escalar y un vector . . . . .	58
5.5.2.	La divergencia de un vector y de una matriz . . . . .	58
5.5.3.	El rotacional de un vector . . . . .	59
5.5.4.	El laplaciano de un escalar y de un vector . . . . .	59
5.6.	Algunas identidades . . . . .	60

# Índice de figuras

4.1. Integral de línea del punto $A$ al $B$ . . . . .	39
4.2. Superficie de integración dada por el cilindro $x^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$ , $y = 0$ , $z = 0$ y $y = 8$ . . . . .	41
4.3. Teorema de la divergencia. Volumen $V$ y superficie $S$ . . . . .	44
4.4. Teorema de la divergencia. Volumen $V$ y superficie $S_i$ . Se puede ver que la superficie $S_i$ está compuesta de las seis caras del paralelepípedo $S_{i1}$ , $S_{i2}$ , $S_{i3}$ , $S_{i4}$ , $S_{i5}$ y $S_{i6}$ . . . . .	45
4.5. Teorema de Stokes. Circuito $C$ y superficie $S$ . . . . .	48
4.6. Teorema de Sokes. La superficie $S$ está formada por múltiples superficies $S_i$ . Se puede ver que la superficie $S_i$ está contenida en el circuito $C_i$ que tiene los cuatro lados de un cuadrado $C_{i1}$ , $C_{i2}$ , $C_{i3}$ y $C_{i4}$ . . . . .	49
4.7. Teorema del rotacional: La integral sobre el disco es igual a la integral sobre la semiesfera. . . . .	51



# Capítulo 1

## Algebra Vectorial

### 1.1. Objetivos Específicos

1. Estudiar el álgebra vectorial.
2. Estudiar rotaciones de un vector.

### 1.2. Escalares y vectores

Los escalares generalmente consisten de un número que puede ser real o complejo. Un vector en cambio representa una cantidad que tiene magnitud y dirección.

Sean  $a$  y  $b$  escalares tales que  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  vectores dados por

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z) = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{D} = (D_x, D_y, D_z) = D_x \mathbf{i} + D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k} \quad (1.4)$$

donde

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad (1.6)$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1). \quad (1.7)$$

Es importante recordar que las componentes del vector representan al punto en el que se encuentra la flecha del vector suponiendo que su cola está en el origen. La posición de la que sale el vector es irrelevante. Así, dos vectores que tienen la misma dirección y magnitud pero parten de puntos distintos son en realidad el mismo vector.

La magnitud de un vector se define como

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (1.8)$$

### 1.3. Vectores unitarios. Cosenos directores

Todo vector puede escribirse en términos de los cosenos directores como

$$\mathbf{A} = A (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma) \quad (1.9) \quad \{\text{cosdir}\}$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos que forma el vector con los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

Calculando la magnitud del vector  $\mathbf{A}$  vemos que

$$A = A \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} \quad (1.10)$$

por lo que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1.11)$$

### 1.4. Multiplicación de un vector por un escalar

La multiplicación de un vector  $\mathbf{A}$  por un escalar  $a$  se define como

$$\mathbf{C} = a\mathbf{A} = (aA_x, aA_y, aA_z) = aA_x\mathbf{i} + aA_y\mathbf{j} + aA_z\mathbf{k}. \quad (1.12)$$

Utilizando la ec. (1.9) vemos que

$$\mathbf{C} = aA (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma) = C (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma) = \quad (1.13)$$

el vector  $\mathbf{C}$  tiene la misma dirección que el vector  $\mathbf{A}$  pero tiene magnitud  $C = aA$ .

### 1.5. Suma de vectores

La suma de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se define como

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \\ &= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Geoméricamente representa la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores como los lados de dicho paralelogramo.

La suma tiene las siguientes propiedades

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (1.15)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (1.16)$$

$$a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B} \quad (1.17)$$

### 1.6. Producto interno. Producto punto

El producto interno de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  produce un escalar y está definido como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (1.18)$$

En particular vemos que un vector por si mismo produce el cuadrado de su magnitud

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A^2. \quad (1.19)$$

Se puede demostrar que también es igual a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (1.20)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los dos vectores.

Geoméricamente el producto punto representa la proyección de un vector sobre el otro.

De la definición del producto punto puede verse que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad (1.21)$$

ya que son vectores unitarios y además

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (1.22)$$

ya que son perpendiculares. Se dice entonces que son ortogonales (perpendiculares entre si y de norma uno).

Es fácil ver que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_x, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_y, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_z \quad (1.23)$$

Entonces cualquier vector puede escribirse como

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}. \quad (1.24)$$

Con esta identidad podemos regresar a la definición de los cosenos directores y verificar

$$\mathbf{A} = A (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma) \quad (1.25)$$

El producto punto tiene las siguientes propiedades

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \quad (1.27)$$

## 1.7. Producto vectorial. Producto cruz

El producto cruz de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  produce un tercer vector  $\mathbf{C}$  y se puede definir en términos del determinante

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Puede demostrarse que

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta \quad (1.29)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los dos vectores. La magnitud del producto cruz es igual al área del paralelogramo cuyos lados son los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  y la dirección del producto cruz es perpendicular a  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

Dado que el producto cruz proviene de un determinante entonces

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \quad (1.30)$$

Se puede verificar que los vectores unitarios cumplen con las siguientes relaciones

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \quad (1.31)$$

y además tienen la siguiente propiedad cíclica

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad (1.32)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad (1.34)$$

$$(1.35)$$

El producto cruz tiene además la propiedad distributiva

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.36)$$

## 1.8. Productos Múltiples

### 1.8.1. Producto $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$

El primer tipo de producto es

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}, \quad (1.37)$$

que es simplemente el producto del escalar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  por el vector  $\mathbf{C}$  y por lo tanto da por resultado un tercer vector.

### 1.8.2. Producto escalar triple $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

Este producto se define también como

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}. \quad (1.38)$$

Este puede ponerse en términos del determinante

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (1.39)$$

De esta identidad y del hecho de que al intercambiar renglones o columnas un número impar de veces en un determinante se obtiene un cambio de signo es fácil ver que

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ &= -(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} - (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Entonces también podemos intercambiar el producto cruz y el producto punto

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}). \quad (1.41)$$

### 1.8.3. Triple producto $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$

{sectripleprod1}

El triple producto

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (1.42)$$

es un vector.

Dado que  $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es perpendicular a  $\mathbf{A}$  y a  $\mathbf{B}$  y  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  es perpendicular a  $\mathbf{C}$  entonces  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  debe estar en el plano formado por  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}, \quad (1.43) \quad \{\text{cruz1}\}$$

pero desconocemos a  $a$  y a  $b$ . Hacemos el producto punto

$$\mathbf{C} \cdot [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}] = \mathbf{C} \cdot (a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + b\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.44)$$

y hacemos  $b = \lambda \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ . Sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos que  $a = -\lambda \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$  e introduciendo este resultado en (1.43) vemos que

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \lambda [(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A}]. \quad (1.45)$$

Se puede demostrar que  $\lambda = 1$  (ver Tarea 1), entonces

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A}. \quad (1.46) \quad \{\text{tripleprod1}\}$$

### 1.8.4. Cuádruple Producto $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$

Definimos  $\mathbf{U} = \mathbf{C} \times \mathbf{D}$  y utilizando las relaciones anteriores vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{U} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \\ &= \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{D}] \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}). \end{aligned} \quad (1.47)$$

En particular, si tomamos  $\mathbf{C} = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{D} = \mathbf{B}$  obtenemos la identidad de Lagrange.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2. \quad (1.48)$$

Puede verificarse este resultado de la definición del producto cruz obteniéndose

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta = (AB \sin \theta)^2. \quad (1.49)$$

## 1.9. Rotación de ejes cartesianos

Consideremos primero una rotación de los ejes  $x$  y  $y$  en torno al eje  $z$  produciendo los nuevos ejes  $x'$  y  $y'$ . Los vectores unitarios del nuevo sistema de coordenadas están dados por

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i} \cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi, \quad (1.50)$$

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi \quad (1.51)$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}. \quad (1.52)$$

Se puede verificar fácilmente que estos vectores son unitarios. Un vector cualquiera  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}') \mathbf{j}' + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}' + \\ &= (A_x \cos \phi + A_y \sin \phi) \mathbf{i}' + (-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi) \mathbf{j}' + A_z \mathbf{k}' \\ &= A'_x \mathbf{i}' + A'_y \mathbf{j}' + A'_z \mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Podemos representar la relación entre las componentes del vector en ambos sistemas de coordenadas como en forma matricial

$$\{\text{rotal}\} \quad \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \mathbb{R}_z(\phi) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

donde

$$\mathbb{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Si definimos

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}' = \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

entonces podemos escribir a (1.54) como

$$\mathbb{A}' = \mathbb{R}_z(\phi) \mathbb{A}. \quad (1.57)$$

Esta matriz sirve también para conectar los vectores unitarios de un sistema de coordenadas con el otro

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \mathbb{R}_z(\phi) \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Una forma más general de escribir esta matriz es

$$\{\text{matrizsimple}\} \quad \mathbb{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

Esta matriz es ortogonal, es decir

$$\mathbb{R}_z^\top(\phi) \mathbb{R}_z(\phi) = \mathbb{R}_z(\phi) \mathbb{R}_z^\top(\phi) = \mathbb{I}, \quad (1.60)$$

como puede verificarse fácilmente. De esta propiedad se verifica inmediatamente que el producto punto se conserva

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' &= \mathbb{A}'^\top \mathbb{B}' = \mathbb{A}^\top \mathbb{R}_z^\top(\phi) \mathbb{R}_z(\phi) \mathbb{B} \\ &= \mathbb{A}^\top \mathbb{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

De esta relación puede verse que la magnitud de un vector es invariante ante rotaciones ya que  $|\mathbf{A}'|^2 = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$ .

Podemos encontrar por un procedimiento similar las matrices de rotación al rededor del eje  $x$

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i} \quad (1.62)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta \quad (1.63)$$

$$\mathbf{k}' = -\mathbf{j} \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta \quad (1.64)$$

obteniéndose una matriz de rotación de la forma

$$\mathbb{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Puede verificarse que también sirve para conectar los vectores unitarios de uno y otro sistema de coordenadas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \mathbb{R}_x(\theta) \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

Análogamente tenemos que para rotaciones al rededor del eje  $y$

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i} \cos \psi - \mathbf{k} \sin \psi \quad (1.67)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} \quad (1.68)$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{i} \sin \psi + \mathbf{k} \cos \psi \quad (1.69)$$

y

$$\mathbb{R}_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Es importante notar que todas las rotaciones son unitarias, y por lo tanto, cualquier combinación de ellas también lo será. Por esto, es posible hacer la operación inversa de una rotación o un conjunto de ella utilizando la transpuesta. Así, si

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

entonces

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \mathbb{R}^\top \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

### 1.9.1. Coordenadas cilíndricas circulares

Las coordenadas cilíndricas pueden obtenerse de una rotación en  $z$  dando lugar a los vectores unitarios

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i} \cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi, \quad (1.73)$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi \quad (1.74)$$

$$\mathbf{u}_z = \mathbf{k}. \quad (1.75)$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_z \end{pmatrix} = \mathbb{R}_z(\phi) \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

### 1.9.2. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas se pueden conseguir de dos rotaciones sucesivas: una al rededor del eje  $z$  un ángulo  $\theta$  y otra un ángulo  $\psi = -(\pi/2\varphi)$  al rededor del eje  $y$ . Así tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\phi, \theta) &= \mathbb{R}_y(\phi) \mathbb{R}_z(\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (1.77) \end{aligned}$$

De esta ecuación se deduce que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ -\mathbf{u}_\varphi \end{pmatrix} = \mathbb{R}(\phi, \theta) \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

que da lugar a las más familiares relaciones

$$\mathbf{u}_r = \sin \varphi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \varphi \mathbf{k}, \quad (1.79)$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \quad (1.80)$$

$$\mathbf{u}_\varphi = \cos \varphi \cos \theta \mathbf{i} + \cos \varphi \sin \theta \mathbf{j} - \sin \varphi \mathbf{k}. \quad (1.81)$$

## 1.10. Invariancia de la norma de un vector ante rotación de ejes

Dado que cualquier matriz de rotación puede escribirse como un producto de rotaciones al rededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  entonces cualquier matriz de rotación es ortogonal

$$\mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{R} \mathbb{R}^T = \mathbb{I}, \quad \mathbb{R}^T = \mathbb{R}^{-1}, \quad (\mathbb{R}^T)^{-1} = \mathbb{R}. \quad (1.82)$$

Entonces, podemos extender el argumento para las rotaciones al rededor del eje  $z$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' &= \mathbf{A}'^T \mathbf{B}' = \mathbf{A}^T \mathbb{R}^T \mathbb{R} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

De esta relación puede verse que la magnitud de un vector es invariante ante rotaciones ya que  $|\mathbf{A}'|^2 = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$ .



## Capítulo 2

# Derivación de Funciones Vectoriales

### 2.1. Objetivos Específicos

1. Estudiar el análisis vectorial.

### 2.2. Funciones escalares

Para una función escalar

$$f \equiv f(t) \tag{2.1}$$

donde  $t \in \mathbb{R}$  y  $f \in \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la derivada se define como

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

### 2.3. Funciones vectoriales y su representación geométrica

Hay varias posibilidades para definir una función vectorial. Una de ellas es la función vectorial de un escalar  $\mathbf{A}(t)$ . Esta consiste de un vector que es función de un sólo parámetro, como por ejemplo el tiempo

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(t) \tag{2.3}$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

### 2.4. Derivada y diferencial de una función vectorial

La derivada de una función vectorial  $\mathbf{A}(t)$  de un parámetro puede obtenerse de la generalización de la derivada de una función escalar. Si extendemos la derivada de una función

escalar obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_x(t + \Delta t) - A_x(t)}{\Delta t} \mathbf{i} \\
 &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_y(t + \Delta t) - A_y(t)}{\Delta t} \mathbf{j} \\
 &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_z(t + \Delta t) - A_z(t)}{\Delta t} \mathbf{k} \\
 &= \frac{dA_x(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z(t)}{dt} \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

## 2.5. Reglas de derivación

Supongamos que  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(t)$  y  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}(t)$  son vectores funciones de un parámetro  $t$  y que  $f \equiv f(t)$  es una función escalar del mismo parámetro  $t$  entonces se tiene que

$$\frac{d}{dt} [f(t) \mathbf{A}(t)] = \frac{df(t)}{dt} \mathbf{A}(t) + f(t) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}, \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)] = \mathbf{A}(t) \cdot \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \cdot \mathbf{B}(t), \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)] = \mathbf{A}(t) \times \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \times \mathbf{B}(t), \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t) \times \mathbf{C}(t)] &= \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t) \times \mathbf{C}(t) \\
 &\quad + \mathbf{A}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{B}(t) \times \mathbf{C}(t) \\
 &\quad + \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t) \times \frac{d}{dt} \mathbf{C}(t)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Demostramos la ecuación (2.6)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)] &= \frac{d}{dt} [A_x(t) B_x(t) + A_y(t) B_y(t) + A_z(t) B_z(t)] \\
 &= \frac{d}{dt} A_x(t) B_x(t) + A_x(t) \frac{d}{dt} B_x(t) \\
 &\quad + \frac{d}{dt} A_y(t) B_y(t) + A_y(t) \frac{d}{dt} B_y(t) \\
 &\quad + \frac{d}{dt} A_z(t) B_z(t) + A_z(t) \frac{d}{dt} B_z(t) \\
 &= \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{B}(t).
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Las demás demostraciones se dejan al lector como ejercicio.

Estas identidades nos permiten llegar a resultados interesantes como que un vector de magnitud constante es perpendicular a su derivada. Supongamos otra vez que  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(t)$  y que su magnitud es constante entonces

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}(t)] = \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = 2\mathbf{A}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = 0 \quad (2.10)$$

entonces

$$\mathbf{A}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = 0 \quad (2.11)$$

que equivale a decir que  $\mathbf{A}(t)$  y  $d\mathbf{A}(t)/dt$  son perpendiculares.

Un ejemplo de este caso es la relación que existe entre la posición  $\mathbf{r}$  de una partícula en movimiento circular uniforme y su velocidad  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . Esta relación puede deducirse el hecho de que para el movimiento circular uniforme se tiene que

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0. \quad (2.12)$$

## 2.6. Fórmula de Taylor para funciones vectoriales

Es posible obtener el equivalente de la serie de Taylor de una función escalar. La serie de Taylor para una función  $f(t)$  escalar al rededor de un punto  $t_0$  es

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(t_0)}{dt^n} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \\ &= f(t_0) + \frac{df(t_0)}{dt} \frac{t-t_0}{1!} + \frac{d^2 f(t_0)}{dt^2} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \frac{d^3 f(t_0)}{dt^3} \frac{(t-t_0)^3}{3!} \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Podemos entonces preguntarnos si una función puede expandirse de manera similar. Suponemos que la función vectorial puede escribirse al rededor del parámetro  $t_0$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}_n (t-t_0)^n \\ &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 (t-t_0) + \mathbf{C}_2 (t-t_0)^2 + \mathbf{C}_3 (t-t_0)^3 + \dots, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde el conjunto de vectores  $\{\mathbf{C}_n\} = \{\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots\}$  es desconocido.

Es fácil ver que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(t_0) &= \mathbf{C}_0, \\
 \frac{d\mathbf{A}(t_0)}{dt} &= 1\mathbf{C}_1, \\
 \frac{d^2\mathbf{A}(t_0)}{dt^2} &= 2 \cdot 1\mathbf{C}_2, \\
 \frac{d^3\mathbf{A}(t_0)}{dt^3} &= 3 \cdot 2 \cdot 1\mathbf{C}_3, \\
 \frac{d^4\mathbf{A}(t_0)}{dt^4} &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\mathbf{C}_4, \\
 &\vdots \\
 \frac{d^n\mathbf{A}(t_0)}{dt^n} &= n!\mathbf{C}_n,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n\mathbf{A}(t_0)}{dt^n} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \\
 &= \mathbf{A}(t_0) + \frac{d\mathbf{A}(t_0)}{dt} \frac{t-t_0}{1!} + \frac{d^2\mathbf{A}(t_0)}{dt^2} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \frac{d^3\mathbf{A}(t_0)}{dt^3} \frac{(t-t_0)^3}{3!} \dots \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

## 2.7. Expresión analítica de las curvaturas de flexión y torsión

Consideremos un vector  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(t)$  y su derivada con respecto al parámetro  $t$ . Un ejemplo puede ser la posición  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t)$  y su derivada  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(t)$  con respecto al tiempo  $t$ .

La derivada del vector puede parametrizarse en términos de la longitud de arco

$$\{\text{arccot}\} \quad s(t) = \int_0^t dt' \sqrt{[x(t')]^2 + [y(t')]^2 + [z(t')]^2} \tag{2.17}$$

cuya derivada y diferencial son

$$\begin{aligned}
 \frac{ds(t)}{dt} &= \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2}, \\
 ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

La derivada puede entonces escribirse como

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{r}(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = \mathbf{u}(s) \frac{ds(t)}{dt}, \tag{2.19}$$

donde

$$\mathbf{u}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}. \tag{2.20}$$

Se puede demostrar que el vector  $\mathbf{u}(s)$  es un vector unitario

$$|\mathbf{u}(s)|^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2 = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta s^2} = 1. \quad (2.21)$$

Por lo tanto  $\mathbf{u}(s)$  es perpendicular a su derivada

$$\mathbf{u}(s) \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{u}(s) = 0, \quad (2.22) \quad \{\text{uperp}\}$$

por lo que recibe el nombre de vector tangente. Dado que  $\mathbf{u}(s)$  es paralelo a  $\mathbf{r}(t)$  entonces también se puede calcular a este vector como

$$\mathbf{u}(s(t)) = \frac{\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|}. \quad (2.23)$$

Esto nos permite definir un conjunto de vectores ortogonales en cada punto de la trayectoria  $\mathbf{r}(t)$ .

Por el momento tenemos dos vectores ortogonales, el vector tangencial es

$$\mathbf{T} = \mathbf{u}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \frac{d\mathbf{r}(t)/dt}{|d\mathbf{r}(t)/dt|}. \quad (2.24)$$

La derivada con respecto a  $s$  de  $\mathbf{u}$  es perpendicular a  $\mathbf{u}$  como puede verse de la ecuación (2.22), entonces, un vector unitario, perpendicular a  $\mathbf{u}$  sería

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} / \left| \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} \right| \quad (2.25)$$

que recibe el nombre de vector principal normal. La magnitud  $|d\mathbf{u}(s)/ds|$  recibe el nombre de curvatura de la curva y el recíproco de esta magnitud es  $\rho$ , el radio de curvatura, entonces

$$\frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{N}. \quad (2.26)$$

Se sigue entonces que

$$\rho = \left[ \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.27)$$

El tercer vector, que recibe el nombre de vector binormal puede obtenerse del producto cruz del tangencial y el normal principal

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}. \quad (2.28) \quad \{\text{binormal}\}$$

Estos vectores nos permiten escribir la velocidad de una partícula de manera conveniente como

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u} \frac{ds}{dt} = v \mathbf{T}, \quad (2.29)$$

y la aceleración como

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{u} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} \frac{ds}{dt} = \mathbf{u} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{u}}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{N}. \quad (2.30)$$

## 2.8. Fórmulas de Frenet

Diferenciando la ecuación (2.28) obtenemos

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{N} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} \quad (2.31)$$

dado que  $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = 0$ . Como  $\mathbf{B}$  es un vector unitario (de magnitud constante) entonces  $d\mathbf{B}/ds$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares. El producto cruz es entonces perpendicular a  $\mathbf{B}$  y a  $\mathbf{T}$ , es decir, es paralelo a  $\mathbf{N}$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\frac{1}{\tau} \mathbf{N} \quad (2.32)$$

donde  $\tau$  recibe el nombre de radio de torsión de la curva y  $1/\tau$  es la torsión de la curva.

## Capítulo 3

# Derivación de campos escalares y vectoriales

### 3.1. Campos escalares

Un campo escalar es una función escalar  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  de un vector

$$\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

donde  $\varphi \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ . En general, en esta unidad también consideraremos el caso más simple en el que

$$\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

donde  $\varphi \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  y  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Un ejemplo físico sería el potencial electrostático en el que éste no depende del tiempo, sólo depende del vector de posición.

### 3.2. Campos vectoriales

Un campo vectorial es una función vectorial de un vector  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ . Puede por ejemplo consistir de un vector que es función de la posición y un parámetro como el tiempo

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Al igual que para los campos escalares, también consideraremos el caso más simple en el que

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Un ejemplo físico sería el campo eléctrico para el caso electrostático en el que éste no depende del tiempo, sólo depende del vector de posición.

### 3.3. Derivación parcial, regla de la cadena

Consideremos un campo escalar

$$\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x, y, z, t). \quad (3.5)$$

Supongamos además que

$$x \equiv x(t), \quad y \equiv y(t), \quad z \equiv z(t) \quad (3.6)$$

entonces, un diferencial del campo escalar está dado por

$$\begin{aligned} d\varphi(t) &= \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial z} \frac{dz(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ahora consideremos otro caso en el que

$$x \equiv x(u, v, w), \quad y \equiv y(u, v, w), \quad z \equiv z(u, v, w) \quad (3.8)$$

y las relaciones inversas son

$$u \equiv u(x, y, z), \quad v \equiv v(x, y, z), \quad w \equiv w(x, y, z) \quad (3.9)$$

Entonces un diferencial del campo escalar es

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv + \frac{\partial\varphi}{\partial w} dw \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde además se puede ver que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (3.11)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (3.12)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \quad (3.13)$$

Sustituyendo estos últimos resultados en (3.10)

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \\ &+ \frac{\partial\varphi}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) \\ &+ \frac{\partial\varphi}{\partial w} \left( \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

y reagrupando términos vemos que

$$\begin{aligned} d\varphi &= \left( \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \\ &+ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \\ &+ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (3.15)$$

de donde se deduce por comparación con la primera línea de (3.10) que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.18)$$

Todas estas son posibles formas de la regla de la cadena.

### 3.4. Gradiente de un campo escalar

Consideremos el vector dado por el cambio de un campo escalar  $\varphi$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$

$$\mathbf{V} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (3.19)$$

cada componente de este vector es la razón de cambio del escalar con respecto a la distancia en las direcciones de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

Un diferencial de desplazamiento es

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (3.20)$$

y la proyección de  $\mathbf{V}$  en la dirección de este vector es

$$\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (3.21)$$

como vimos en las secciones anteriores.

Por esto vemos que la componente de  $\mathbf{V}$  en una dirección dada es la razón de cambio de  $\varphi$  con respecto a la distancia. La función vectorial  $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}(x, y, z)$  está asociada con la función escalar de manera que es independiente del sistema de coordenadas empleado. A esta cantidad se le conoce con el nombre de gradiente de la función  $\varphi$  y puede expresarse como

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (3.22)$$

donde el operador diferencial *nabla* se define como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (3.23) \quad \{\text{nabla1}\}$$

Podemos escribir entonces

$$\frac{d\varphi}{ds} = \text{grad}\varphi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\varphi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (3.24)$$

Dado que la componente del vector  $\text{grad}\varphi$  en cualquier dirección es la derivada de  $\varphi$  en esa dirección, se sigue que  $\text{grad}\varphi$  debe apuntar en la dirección en la que la derivada de  $\varphi$  es máxima y tiene una magnitud igual a la derivada  $d\varphi/ds$ . En particular  $\text{grad}\varphi$  no debe tener ninguna componente en la dirección en la que  $\varphi$  es constante, entonces, su dirección es perpendicular a las curvas de nivel que salen de  $\varphi = \text{constante}$ .

El gradiente de una función está asociado entonces a la derivada direccional de un campo escalar como

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{A}} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + A_x, y + A_y, z + A_z) - \varphi(x, y, z)}{A} \quad (3.25)$$

ya que, según la regla de la cadena

$$\begin{aligned} d\varphi &= \lim_{A \rightarrow 0} [\varphi(x + A_x, y + A_y, z + A_z) - \varphi(x, y, z)] \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x} A_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} A_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} A_z \right] \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} \nabla\varphi \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.5. Divergencia y rotacional de un campo escalar

En la sección anterior hemos definido un operador llamado *nabla* de la forma (3.23)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Si  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$  es un campo escalar

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (3.27)$$

podemos multiplicar al operador *nabla* en dos formas distintas de acuerdo al producto escalar y vectorial. Es decir, el operador *nabla* es vectorial, entonces, al actuar sobre un escalar como en la sección anterior, produce un vector; al actuar sobre un vector en la forma de un producto punto produce un escalar y al actuar sobre un vector en la forma de un producto cruz produce un nuevo vector.

Cuando utilizamos el producto punto, el operador *nabla* produce la divergencia

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (3.28)$$

y si usamos el producto cruz, entonces produce el rotacional

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

La derivada total de un vector puede calcularse como

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} dz = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) \mathbf{F} \\ &= (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.30)$$

y en particular

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) \mathbf{F} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{F}. \quad (3.31) \quad \{\text{dervec1}\}$$

Como  $\mathbf{u}$  es un vector unitario entonces (3.31) es la derivada direccional de un campo vectorial.

Dado que no hay ambigüedad alguna, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{F} \equiv (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{F} \quad (3.32)$$

donde, el operador  $\mathbf{u} \cdot \nabla$  está dado por

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.33)$$

### 3.6. Identidades básicas

Algunas identidades importantes relacionadas al operador  $\nabla$  son

$$\nabla \cdot \varphi \mathbf{u} = \varphi \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \varphi \mathbf{u} \quad (3.34)$$

$$\nabla \times \varphi \mathbf{u} = \varphi \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \varphi \times \mathbf{u} \quad (3.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.36)$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (3.37)$$

$$\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (3.38)$$

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad (3.39)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) &= \operatorname{rotrot} \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2) = 0 \quad (3.42)$$

donde

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.43)$$

La demostración de estas fórmulas puede hacerse por sustitución directa. Como ejemplo demostramos la ecuación (3.39) hacemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \varphi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

y vemos que si el orden de derivación es irrelevante, entonces

$$\{\text{rotgradcero2}\} \quad \nabla \times \nabla \varphi = \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0 = \mathbf{0}. \quad (3.45)$$

De las relaciones (3.34)-(3.42) se puede ver en particular que

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \quad (3.46)$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{u} \quad (3.48)$$

## 3.7. Coordenadas curvilíneas ortogonales

En esta unidad estudiamos de manera general como pasar de un sistema de coordenadas cartesianas a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales.

### {facescala} 3.7.1. Factores de escala

Supongamos que las coordenadas rectangulares pueden escribirse en términos de un nuevo sistema de coordenadas  $\{u_1, u_2, u_3\}$  como

$$x \equiv x(u_1, u_2, u_3) \quad (3.49)$$

$$y \equiv y(u_1, u_2, u_3) \quad (3.50)$$

$$z \equiv z(u_1, u_2, u_3). \quad (3.51)$$

Las relaciones inversas son entonces

$$u_1 \equiv u_1(x, y, z) \quad (3.52)$$

$$u_2 \equiv u_2(x, y, z) \quad (3.53)$$

$$u_3 \equiv u_3(x, y, z) \quad (3.54)$$

$$(3.55)$$

Si dejamos a  $u_2$  y  $u_3$  constantes y variamos  $u_1$  entonces obtendremos de  $x$ ,  $y$  y  $z$  la parametrización de alguna curva donde el parámetro es  $u_1$ . Lo mismo ocurre cuando dejamos a  $u_1$

y  $u_3$  constantes y variamos  $u_2$ . En este caso obtenemos otra curva distinta parametrizada en  $u_2$ .

Por ejemplo

$$x = r \cos \theta \quad (3.56)$$

$$y = r \sin \theta \quad (3.57)$$

$$z = z, \quad (3.58)$$

si fijamos el valor de  $r$  y  $z$  entonces tendremos que  $x$ ,  $y$  y  $z$  parametrizan a un círculo cuyo centro se encuentra en  $(0, 0, z)$  y su radio es  $r$ . Si, en cambio dejamos  $\theta$  y  $z$  constantes entonces  $x$ ,  $y$  y  $z$  parametrizan a una línea recta que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$  y que es paralela al plano  $xy$  pasando a una altura  $z$ .

Supongamos que

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz \quad (3.59)$$

es un vector que señala a un punto  $(x, y, z)$  del espacio. El vector

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{u}_1 \quad (3.60) \quad \{\text{lameraU1}\}$$

es tangente a la curva que se forma al dejar  $u_2$  y  $u_3$  constantes. En la ecuación anterior

$$u_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right| \quad (3.61) \quad \{\text{unitariou1}\}$$

es un vector unitario y

$$h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right| \quad (3.62)$$

es el factor de escala de la variable  $u_1$ . En general tenemos que

$$\mathbf{U}_1 = h_1 \mathbf{u}_1 \quad (3.63)$$

$$\mathbf{U}_2 = h_2 \mathbf{u}_2 \quad (3.64)$$

$$\mathbf{U}_3 = h_3 \mathbf{u}_3 \quad (3.65)$$

y

$$h_1 = \frac{\partial s_1}{\partial u_1} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right| \quad (3.66)$$

$$h_2 = \frac{\partial s_2}{\partial u_2} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \right| \quad (3.67)$$

$$h_3 = \frac{\partial s_3}{\partial u_3} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right| \quad (3.68)$$

Por analogía con (2.17) las longitudes de arco están dadas por

$$s_1(u_1) = \int_0^{u_1} du'_1 \sqrt{\left[\frac{\partial x(u'_1, u'_2, u'_3)}{\partial u'_1}\right]^2 + \left[\frac{\partial y(u'_1, u'_2, u'_3)}{\partial u'_1}\right]^2 + \left[\frac{\partial z(u'_1, u'_2, u'_3)}{\partial u'_1}\right]^2} \quad (3.69)$$

$$s_2(u_2) = \int_0^{u_2} du'_2 \sqrt{\left[\frac{\partial x(u'_1, u'_2, u'_3)}{\partial u'_2}\right]^2 + \left[\frac{\partial y(u'_1, u'_2, u'_3)}{\partial u'_2}\right]^2 + \left[\frac{\partial z(u'_1, u'_2, u'_3)}{\partial u'_2}\right]^2} \quad (3.70)$$

$$s_3(u_3) = \int_0^{u_3} du'_3 \sqrt{\left[\frac{\partial x(u'_1, u'_2, u'_3)}{\partial u'_3}\right]^2 + \left[\frac{\partial y(u'_1, u'_2, u'_3)}{\partial u'_3}\right]^2 + \left[\frac{\partial z(u'_1, u'_2, u'_3)}{\partial u'_3}\right]^2} \quad (3.71)$$

Adoptamos la combención de que  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3$  formen un sistema de coordenadas de mano derecha, es decir

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1. \quad (3.72)$$

Supongamos que  $s$  es el arco de longitud de  $\mathbf{r}$  sobre alguna trayectoria arbitraria, entonces, la derivada total del vector de posición  $\mathbf{r}$  a lo largo de esa trayectoria está dado por

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \frac{du_1}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \frac{du_2}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \frac{du_3}{ds} \\ &= \mathbf{U}_1 \frac{du_1}{ds} + \mathbf{U}_2 \frac{du_2}{ds} + \mathbf{U}_3 \frac{du_3}{ds} \end{aligned} \quad (3.73)$$

y si las curvas formadas al dejar constante  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  son ortogonales, es decir

$$\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{U}_3 = 0 \quad (3.74)$$

entonces se sigue que, al ser  $d\mathbf{r}/ds$  unitario

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 1 = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_1 \left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{U}_2 \left(\frac{du_2}{ds}\right)^2 + \mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{U}_3 \left(\frac{du_3}{ds}\right)^2 \quad (3.75)$$

o bien

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_1 du_1^2 + \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{U}_2 du_2^2 + \mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{U}_3 du_3^2 \\ &= |\mathbf{U}_1|^2 du_1^2 + |\mathbf{U}_2|^2 du_2^2 + |\mathbf{U}_3|^2 du_3^2 \\ &= h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \end{aligned} \quad (3.76)$$

### 3.7.2. Diferenciales de volumen y superficie en coordenadas generalizadas.

Los vectores  $\mathbf{U}_1 du_1$ ,  $\mathbf{U}_2 du_2$  y  $\mathbf{U}_3 du_3$  son vectores mutuamente perpendiculares cuya magnitud es la longitud de arco  $ds_1$ ,  $ds_2$  and  $ds_3$ , por lo que podemos definir el diferencial de volumen  $d\tau$  como el volumen del paralelepípedo formado entre estos tres vectores

$$\begin{aligned} d\tau &= \mathbf{U}_1 du_1 \times \mathbf{U}_2 du_2 \cdot \mathbf{U}_3 du_3 \\ &= (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3) ds_1 ds_2 ds_3 \\ &= (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3) h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \\ &= ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Si  $\mathbf{U}_1 du_1$ ,  $\mathbf{U}_2 du_2$  y  $\mathbf{U}_3 du_3$  no fueran mutuamente perpendiculares entonces podemos decir que

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{U}_1 du_1 \times \mathbf{U}_2 du_2 \cdot \mathbf{U}_3 du_3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = J \left( \begin{matrix} x, y, z \\ u_1, u_2, u_3 \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

donde  $J$  es el jacobiano.

De manera similar podemos encontrar los diferenciales de superficie, como el área que se forma entre cada par de vectores, es decir, como el producto cruz de estos vectores

$$d\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{U}_2 du_2 \times \mathbf{U}_3 du_3 = \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 ds_2 ds_3 = \mathbf{u}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (3.79)$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{U}_3 du_3 \times \mathbf{U}_1 du_1 = \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 ds_3 ds_1 = \mathbf{u}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (3.80)$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_3 = \mathbf{U}_1 du_1 \times \mathbf{U}_2 du_2 = \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 ds_1 ds_2 = \mathbf{u}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (3.81)$$

Si  $\mathbf{U}_1 du_1$ ,  $\mathbf{U}_2 du_2$  y  $\mathbf{U}_3 du_3$  no fueran mutuamente perpendiculares entonces podemos decir que

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma}_1 &= \mathbf{U}_2 du_2 \times \mathbf{U}_3 du_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma}_2 &= \mathbf{U}_3 du_3 \times \mathbf{U}_1 du_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma}_3 &= \mathbf{U}_1 du_1 \times \mathbf{U}_2 du_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.84)$$

### 3.7.3. Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en coordenadas generalizadas

A continuación obtenemos expresiones para el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano. Consideremos la derivada direccional del campo escalar  $f$

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.85) \quad \{\text{totf2}\}$$

En términos de las nuevas variables tenemos que el diferencial total del campo escalar  $f$  es

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 \quad (3.86) \quad \{\text{totf1}\}$$

y el diferencial de  $\mathbf{r}$  es

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 \\ &= \mathbf{U}_1 du_1 + \mathbf{U}_2 du_2 + \mathbf{U}_3 du_3 \\ &= h_1 \mathbf{u}_1 du_1 + h_2 \mathbf{u}_2 du_2 + h_3 \mathbf{u}_3 du_3. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Nos interesa conocer el gradiente de  $f$  en el nuevo sistema de coordenadas que debe estar dado por

$$\{\text{totf3}\} \quad \nabla f = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \quad (3.88)$$

Sustituyendo (3.88) en (3.85) e igualando con (3.86) vemos que la diferencial total de  $f$  es

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 \\ &= h_1 \lambda_1 du_1 + h_2 \lambda_2 du_2 + h_3 \lambda_3 du_3. \end{aligned} \quad (3.89)$$

entonces, como  $du_1$ ,  $du_2$  y  $du_3$  son linealmente independientes, tenemos que

$$\lambda_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad (3.90)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad (3.91)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3}. \quad (3.92)$$

La ecuación (3.88) se transforma en

$$\nabla f = \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{u}_2}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{u}_3}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \quad (3.93)$$

y el operador nabla puede expresarse de manera general como

$$\{\text{nablageneral}\} \quad \nabla f = \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{u}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{u}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}. \quad (3.94)$$

La ecuación (3.94) nos provee de un método general para calcular el gradiente, la divergencia y el rotacional en cualquier sistema de coordenadas. Sustituyendo las ecuaciones (3.66), (3.67) y (3.68) en (3.94) obtenemos que el gradiente del escalar  $f$  también se puede escribir como

$$\begin{aligned} \nabla f &= \mathbf{u}_1 \left( \frac{1}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \mathbf{u}_2 \left( \frac{1}{\partial s_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \mathbf{u}_3 \left( \frac{1}{\partial s_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \\ &= \mathbf{u}_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \right) \frac{\partial f}{\partial u_1} + \mathbf{u}_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \right) \frac{\partial f}{\partial u_2} + \mathbf{u}_3 \left( \frac{\partial u_3}{\partial s_3} \right) \frac{\partial f}{\partial u_3} \\ &= \mathbf{u}_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial f}{\partial s_2} + \mathbf{u}_3 \frac{\partial f}{\partial s_3} \end{aligned} \quad (3.95)$$

y el operador gradiente es

$$\{\text{nablageral2}\} \quad \nabla = \mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \mathbf{u}_3 \frac{\partial}{\partial s_3}. \quad (3.96)$$

En particular, haciendo  $f = u_1$ ,  $f = u_2$  y  $f = u_3$ , de las ecuaciones (3.66), (3.67) y (3.68) podemos ver que

$$\nabla u_1 = \frac{1}{h_1} \mathbf{u}_1, \quad (3.97)$$

$$\nabla u_2 = \frac{1}{h_2} \mathbf{u}_2, \quad (3.98)$$

$$\nabla u_3 = \frac{1}{h_3} \mathbf{u}_3 \quad (3.99)$$

y consecuentemente

$$\nabla \times \frac{1}{h_1} \mathbf{u}_1 = \nabla \times \frac{1}{h_2} \mathbf{u}_2 = \nabla \times \frac{1}{h_3} \mathbf{u}_3 = 0 \quad (3.100)$$

ya que el rotacional de cualquier gradiente es necesariamente cero como puede verse de las ecuaciones (3.39) y (3.45).

Además, como los vectores  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3$  son ortogonales y a mano derecha, es decir

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 \quad (3.101)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 \quad (3.102)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \quad (3.103)$$

y adicionalmente de (3.97), (3.98) y (3.99) tenemos que

$$\nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{\mathbf{u}_1}{h_2 h_3} \quad (3.104)$$

$$\nabla u_3 \times \nabla u_1 = \frac{\mathbf{u}_2}{h_1 h_3} \quad (3.105)$$

$$\nabla u_1 \times \nabla u_2 = \frac{\mathbf{u}_3}{h_1 h_2} \quad (3.106)$$

entonces, de acuerdo con la ecuación (3.42) vemos que las divergencias de las expresiones anteriores (3.104), (3.105) y (3.106) son cero

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{u}_1}{h_2 h_3} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{u}_2}{h_1 h_3} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{u}_3}{h_1 h_2} = 0. \quad (3.107)$$

Estas relaciones serán de gran importancia en los cálculos que siguen.

Ahora busquemos la divergencia de un campo vectorial expresado en términos de sus componentes a lo largo de los vectores unitarios  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3$

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{u}_1 + F_2 \mathbf{u}_2 + F_3 \mathbf{u}_3. \quad (3.108)$$

La divergencia del vector anterior es

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (F_1 \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (F_2 \mathbf{u}_2) + \nabla \cdot (F_3 \mathbf{u}_3). \quad (3.109) \quad \{\text{divgen1}\}$$

Para analizar esta expresión empezamos por el primer término. Multiplicando el argumento de la divergencia por  $h_2h_3$  y dividiendo entre  $h_2h_3$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (F_1 \mathbf{u}_1) &= \nabla \cdot \left[ (F_1 h_2 h_3) \frac{\mathbf{u}_1}{h_2 h_3} \right] \\
&= \nabla (F_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\mathbf{u}_1}{h_2 h_3} + (F_1 h_2 h_3) \nabla \cdot \frac{\mathbf{u}_1}{h_2 h_3} = \nabla (F_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\mathbf{u}_1}{h_2 h_3} \\
&= \frac{\mathbf{u}_1}{h_2 h_3} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\mathbf{u}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\mathbf{u}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 h_2 h_3) \right\} \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3). \tag{3.110}
\end{aligned}$$

Análogamente, podemos calcular las otras dos divergencias de (3.109) y resumiendo

$$\nabla \cdot (F_1 \mathbf{u}_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) \tag{3.111}$$

$$\nabla \cdot (F_2 \mathbf{u}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2} (F_2 h_1 h_3) \tag{3.112}$$

$$\nabla \cdot (F_3 \mathbf{u}_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (F_3 h_1 h_2). \tag{3.113}$$

Finalmente, la divergencia puede escribirse de manera general como

$$\{\text{divgeneral}\} \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_3 h_1 h_2) \right]. \tag{3.114}$$

También podemos decir que el operador divergencia, en coordenadas generalizadas es

$$\{\text{divgeneral2}\} \quad \nabla \cdot = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} h_2 h_3 \mathbf{u}_1 \cdot + \frac{\partial}{\partial u_2} h_1 h_3 \mathbf{u}_2 \cdot + \frac{\partial}{\partial u_3} h_1 h_2 \mathbf{u}_3 \cdot \right]. \tag{3.115}$$

El operador laplaciano se puede obtener combinando las ecuaciones (3.94) y (3.114) o (3.115). Primero vemos que si hacemos

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{u}_2}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{u}_3}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \tag{3.116}$$

entonces

$$F_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \tag{3.117}$$

$$F_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \tag{3.118}$$

$$F_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3}, \tag{3.119}$$

sustituyendo estas relaciones en (3.114) obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \nabla \cdot \nabla f \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} h_2 h_3 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} h_1 h_3 \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} h_1 h_2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \tag{3.120}
\end{aligned}$$

Ahora nuestro objetivo es encontrar el rotacional en coordenadas generalizadas. Análogamente a (3.109) tenemos que el rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  es

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (F_1 \mathbf{u}_1) + \nabla \times (F_2 \mathbf{u}_2) + \nabla \times (F_3 \mathbf{u}_3), \tag{3.121}$$

y escribiendo el primer término en la forma

$$\begin{aligned}
\nabla \times (F_1 \mathbf{u}_1) &= \nabla \times \left( F_1 h_1 \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} \right) \\
&= \nabla (F_1 h_1) \times \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} + F_1 h_1 \nabla \times \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} \\
&= \nabla (F_1 h_1) \times \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} = - \left( \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} \times \nabla \right) (F_1 h_1) \\
&= - \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} \times \left[ \frac{\mathbf{u}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_1) + \frac{\mathbf{u}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 h_1) + \frac{\mathbf{u}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 h_1) \right] \right\} \\
&= - \left[ \frac{\mathbf{u}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 h_1) - \frac{\mathbf{u}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 h_1) \right] \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_2 \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial u_2} - h_3 \mathbf{u}_3 \frac{\partial}{\partial u_2} \right] (F_1 h_1). \tag{3.122}
\end{aligned}$$

En forma análoga podemos calcular los otros dos términos restantes obteniendo en resumen

$$\nabla \times (F_1 \mathbf{u}_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_2 \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial u_2} - h_3 \mathbf{u}_3 \frac{\partial}{\partial u_2} \right] (F_1 h_1), \tag{3.123}$$

$$\nabla \times (F_2 \mathbf{u}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_3 \mathbf{u}_3 \frac{\partial}{\partial u_1} - h_1 \mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_3} \right] (F_2 h_2), \tag{3.124}$$

$$\nabla \times (F_3 \mathbf{u}_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_1 \mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_2} - h_2 \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial u_1} \right] (F_3 h_3). \tag{3.125}$$

Estas expresiones pueden resumirse por medio del determinante

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{u}_1 & h_2 \mathbf{u}_2 & h_3 \mathbf{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}. \tag{3.126} \quad \{\text{rotageneral}\}$$

### 3.7.4. Coordenadas Cilíndricas

Como ya vimos en la sección 3.7.1, las coordenadas cilíndricas corresponden a

$$u_1 = r, \quad (3.127)$$

$$u_2 = \theta, \quad (3.128)$$

$$u_3 = z, \quad (3.129)$$

y se relacionan con las coordenadas cartesianas a través de las relaciones

$$x = r \cos \theta, \quad (3.130)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (3.131)$$

$$z = z, \quad (3.132)$$

Según las ecuaciones (3.69), (3.70) y (3.69)

$$s_1 = s_r = r \quad (3.133)$$

$$s_2 = s_\theta = r\theta \quad (3.134)$$

$$s_3 = s_z = z. \quad (3.135)$$

De las ecuaciones (3.60), (3.63), (3.64) y (3.65), los vectores  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$  y  $\mathbf{U}_3$  están dados por

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad (3.136)$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_\theta = -r \sin \theta \mathbf{i} + r \cos \theta \mathbf{j}, \quad (3.137)$$

$$\mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_z = \mathbf{k}, \quad (3.138)$$

de las ecuaciones (3.66), (3.67) y (3.68), los factores de escala son

$$h_1 = h_r = 1, \quad (3.139)$$

$$h_2 = h_\theta = r, \quad (3.140)$$

$$h_3 = 1 \quad (3.141)$$

$$(3.142)$$

y los vectores unitarios, según (3.61) son

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad (3.143)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \quad (3.144)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{U}_z = \mathbf{k}. \quad (3.145)$$

El diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas es entonces

$$d\tau = r dr d\theta dz \quad (3.146)$$

y los diferenciales de superficie son

$$d\sigma_1 = d\sigma_r = \mathbf{u}_r r d\theta dz, \quad (3.147)$$

$$d\sigma_2 = d\sigma_\theta = \mathbf{u}_\theta dr dz, \quad (3.148)$$

$$d\sigma_3 = d\sigma_z = \mathbf{u}_z r dr d\theta. \quad (3.149)$$

De acuerdo con la ecuación (3.96), el gradiente se puede escribir como

$$\nabla = \mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.150)$$

De acuerdo con la ecuación (3.114), la divergencia de un campo vectorial

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}_r F_r + \mathbf{u}_\theta F_\theta + \mathbf{u}_z F_z \quad (3.151)$$

es

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (F_r r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (F_z r) \right] \quad (3.152)$$

De (3.120), el laplaciano está dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.153)$$

Según la ecuación (3.126), el rotacional está dado por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{F}_r & r\mathbf{F}_\theta & \mathbf{F}_z \end{vmatrix} \quad (3.154)$$



## Capítulo 4

# Integración de Campos Escalares y Vectoriales

### 4.1. Integrales de línea

Supongamos que  $\mathbf{F}$  es un vector que es función de la posición, es decir es un campo vectorial y que  $C$  representa a una curva señalada por el vector  $\mathbf{r}$ , entonces, un diferencial de arco puede ser calculado como

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \mathbf{u} ds, \quad (4.1)$$

como ya hemos visto. Entonces, una integral de línea de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  se define como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) ds. \quad (4.2) \quad \{\text{lineint}\}$$

Suponemos que la curva  $C$  es suave, es decir,  $C$  está hecha de arcos consecutivos en los que no solo  $\mathbf{u}$  existe si no que además es continuo de tal suerte que  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$  es continuo si  $\mathbf{F}$  es continua. También supondremos que la curva no se intersecta con sí misma.

El vector  $\mathbf{F}$  está dado por

$$\mathbf{F} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k} \quad (4.3)$$

de tal manera que la integral (4.2) toma la forma

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz]. \quad (4.4)$$

### 4.2. Campo escalar y campo vectorial conservativos

Supongamos que el integrando de la ecuación (4.24) es una diferencial exacta, es decir

$\{\text{seconservativo}\}$

$$Pdx + Qdy + Rdz = d\varphi, \quad (4.5) \quad \{\text{dexacta1}\}$$

entonces la integral de línea (4.24) toma la forma

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz] \\ &= \int_C d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A).\end{aligned}\quad (4.6)$$

donde  $A$  y  $B$  son el punto inicial y final como puede verse en la figura 4.1. De esta manera la integral de línea sólo depende del punto final y del inicial sin importar que camino se ha seguido para calcular la integral.

Si se cumple la ecuación (4.5) entonces

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \quad (4.7)$$

donde

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = R, \quad (4.10)$$

Derivando (4.8) con respecto a  $y$  y (4.9) con respecto a  $x$  vemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \quad (4.12)$$

y si las derivadas son continuas entonces

$$\{\text{rotcero1}\} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (4.13)$$

Análogamente vemos que, si las derivadas son continuas, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad (4.14)$$

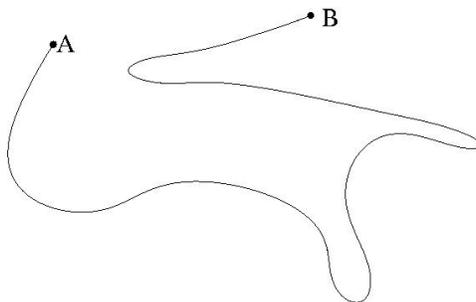
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad (4.15)$$

Podemos ver que si la función  $\varphi$  existe entonces  $\mathbf{F}$  puede escribirse como una diferencial exacta y las funciones  $P$ ,  $Q$  y  $R$  deben cumplir (4.13), (4.14) y (4.14). Notamos además que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (4.16)$$

ser idéntico a cero si se cumplen (4.13), (4.14) y (4.14). De este último resultado se sigue que

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi. \quad (4.17)$$



{integlinea}

Figura 4.1: Integral de línea del punto  $A$  al  $B$ .

### 4.3. Campo vectorial irrotacional

Un ejemplo de un campo irrotacional es el campo eléctrico  $\mathbf{F}$  de una carga puntual. Se dice que este campo es irrotacional ya que su rotacional es cero

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (4.18)$$

El campo eléctrico de una carga puntual, salvo por unidades y constantes tiene la forma

$$\mathbf{F} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} \quad (4.19)$$

y como ya hemos visto, un círculo de radio  $a$  en el plano  $xy$  puede parametrizarse como

$$x = a \cos t, \quad (4.20)$$

$$y = a \sin t, \quad (4.21)$$

$$z = 0, \quad (4.22)$$

donde  $t \in [0, 2\pi]$  para hacer una revolución completa. El diferencial de trayectoria es entonces

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = -ia \sin t + ja \cos t \quad (4.23)$$

entonces la integral toma la forma

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy \right] \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{a \cos t}{a^3} a \sin t + \frac{a \sin t}{a^3} a \cos t \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Es interesante notar que el que esta integral sea cero tiene que ver con el hecho de que el campo eléctrico es conservativo. Se puede comprobar fácilmente que

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (4.25)$$

y que efectivamente

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.26)$$

tal como lo predicen los resultados de la sección 4.2.

## 4.4. Integrales de Superficie

Una superficie  $S$  puede caracterizarse por una ecuación de la forma

$$g(x, y, z) = 0. \quad (4.27)$$

El gradiente de esta función es entonces cero

$$\nabla g(x, y, z) = 0. \quad (4.28)$$

Que  $\nabla g = 0$ , significa que es perpendicular a la superficie  $S$ .

Entonces, mientras  $\nabla g$  exista sobre una superficie dada,

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla g(x, y, z)}{|\nabla g(x, y, z)|} \quad (4.29)$$

es un vector unitario perpendicular a la superficie. Dado que  $g$  es constante sobre toda la superficie, el gradiente de  $g$  debe ser igual a cero en cualquier dirección sobre la superficie. Entonces, la única posibilidad que queda es que  $\nabla g$  sea perpendicular a la superficie  $S$ . El signo en la expresión anterior queda sin determinar ya que  $\mathbf{n}$  puede apuntar en cualquiera de las dos direcciones de la superficie  $S$ .

El diferencial de superficie puede encontrarse como

$$d\sigma_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (4.30)$$

Finalmente, la integral sobre la superficie  $S$ , caracterizada por la ecuación  $g(x, y, z) = 0$ , de un potencial vectorial  $\mathbf{F}$  puede ser construida como

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma_{\mathbf{n}}. \quad (4.31)$$

### 4.4.1. Ejemplo de Integración de Superficie

{ejemsupsec}

Veamos un ejemplo. Hallar

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (4.32)$$

del volumen limitado por el cilindro  $x^2 + z^2 = 9$  y los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  y  $y = 8$ , siendo  $\mathbf{A} = 6z\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ . La superficie sobre la que tenemos que integrar es la que se muestra en la figura 4.2

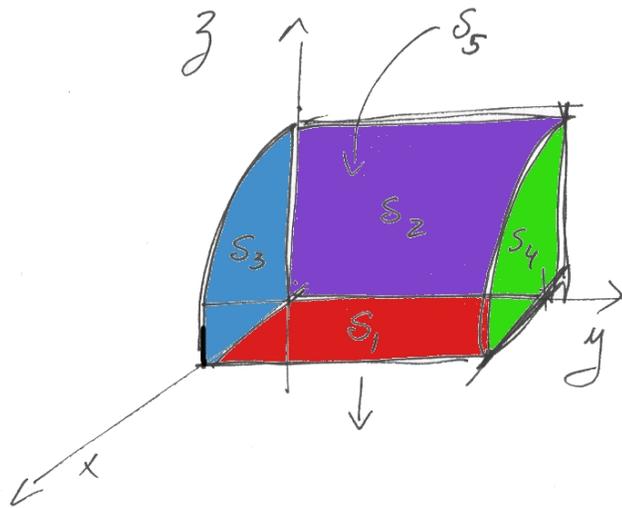


Figura 4.2: Superficie de integración dada por el cilindro  $x^2 + z^2 = 9$  y los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  y  $y = 8$ .

**Superficie  $S_1$**  En esta superficie

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= z \\ \mathbf{n}_1 &= \pm \frac{\nabla g_1}{|\nabla g_1|} = -\mathbf{k} \\ d\boldsymbol{\sigma}_1 &= (d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1 = -\mathbf{k} dx dy \end{aligned} \quad (4.33)$$

La integral sobre  $S_1$  es

$$\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_1 = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=8} x dx dy = \frac{8 \times 3^2}{2} = 4 \times 9 = 36. \quad (4.34)$$

**Superficie  $S_2$**  En esta superficie

$$\begin{aligned} g_2(x, y, z) &= x \\ \mathbf{n}_2 &= \pm \frac{\nabla g_2}{|\nabla g_2|} = -\mathbf{i} \\ d\boldsymbol{\sigma}_2 &= (d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_2 = -\mathbf{i} dy dz \end{aligned} \quad (4.35)$$

La integral sobre  $S_2$  es

$$\int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_2 = \int_{y=0}^{y=8} \int_{z=0}^{z=3} (-6z) dy dz = -\frac{6 \times 8 \times 3^2}{2} = -6 \times 36. \quad (4.36)$$

**Superficie  $S_3$**  En esta superficie

$$\begin{aligned} g_3(x, y, z) &= y \\ \mathbf{n}_3 &= \pm \frac{\nabla g_3}{|\nabla g_3|} = -\mathbf{j} \\ d\boldsymbol{\sigma}_3 &= (d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_3) \mathbf{n}_3 = -\mathbf{j} r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.37)$$

La integral sobre  $S_3$  es

$$\begin{aligned} \int_{S_3} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_3 &= - \int_{r=0}^{r=3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (2x + y) r dr d\theta \\ &= - \int_{r=0}^{r=3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (2x) r dr d\theta = - \int_{r=0}^{r=3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} 2r \cos \theta r dr d\theta \\ &= -2 \int_{r=0}^{r=3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} r^2 \cos \theta dr d\theta = -2 [\sin \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{r=0}^{r=3} r^2 dr \\ &= -2 \int_{r=0}^{r=3} r^2 dr = - \left[ \frac{2}{3} r^3 \right]_{r=0}^{r=3} = -18. \end{aligned} \quad (4.38)$$

En esta integral hemos hecho

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (4.39)$$

**Superficie  $S_4$**  En esta superficie

$$\begin{aligned} g_4(x, y, z) &= y - 8 \\ \mathbf{n}_4 &= \pm \frac{\nabla g_4}{|\nabla g_4|} = \mathbf{j} \\ d\boldsymbol{\sigma}_4 &= (d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_4) \mathbf{n}_4 = \mathbf{j} r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.40)$$

La integral sobre  $S_4$  es

$$\begin{aligned} \int_{S_4} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_4 &= \int_{r=0}^{r=3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (2x + y) r dr d\theta \\ &= \int_{r=0}^{r=3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (2x + 8) r dr d\theta \\ &= \int_{r=0}^{r=3} 2r^2 dr + 8 \int_{r=0}^{r=3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} r dr d\theta \\ &= \frac{2}{3} 27 + 8 \frac{\pi}{2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=3} = 18 + 2\pi \times 9 = 18(1 + \pi). \end{aligned} \quad (4.41)$$

**Superficie  $S_5$**  En esta superficie

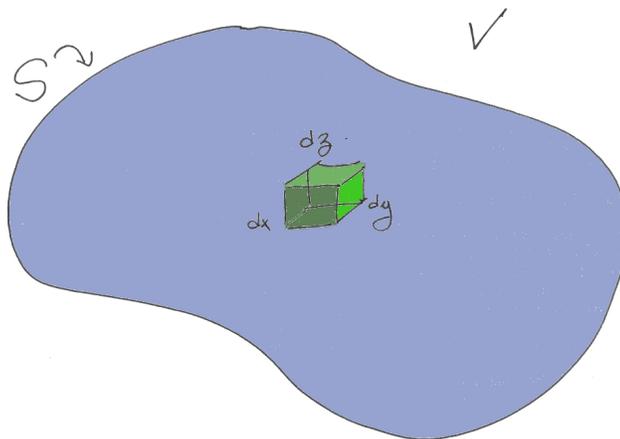
$$\begin{aligned} g_5(x, y, z) &= x^2 + z^2 - 9 \\ \mathbf{n}_5 &= \pm \frac{\nabla g_5}{|\nabla g_5|} = \frac{x\mathbf{i} + z\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} = \mathbf{u}_r \\ d\boldsymbol{\sigma}_5 &= (d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_5) \mathbf{n}_5 = \mathbf{u}_r r d\theta dy \end{aligned} \quad (4.42)$$

La integral sobre  $S_5$  es

$$\begin{aligned} \int_{S_5} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_5 &= \int_{y=0}^{y=8} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (6z \cos \theta - x \sin \theta) r d\theta dy \\ &= \int_{y=0}^{y=8} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (6r \sin \theta \cos \theta - r \cos \theta \sin \theta) r d\theta dy \\ &= 5r^2 \left( \int_{y=0}^{y=8} dy \right) \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 5(9)(8) \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin \theta d \sin \theta = 5(9)(8) \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\ &= \frac{5(9)(8)}{2} = 5(9)(4) = 5 \times 36. \end{aligned} \quad (4.43)$$

La integral completa es entonces

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_1 + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_2 \\ &\quad + \int_{S_3} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_3 + \int_{S_4} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_4 + \int_{S_5} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_5 \\ &= 36 - 6 \times 36 - 18 + 18\pi + 18 + 5 \times 36 = 18\pi \end{aligned} \quad (4.44)$$



{difvola}

Figura 4.3: Teorema de la divergencia. Volumen  $V$  y superficie  $S$ .

## 4.5. Teorema de la divergencia

Si  $\mathbf{F}(x, y, z)$  es un campo vectorial,  $V$  es el volumen encerrado por la superficie  $S$  entonces

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} d\tau = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (4.45) \quad \{\text{teodiv1}\}$$

Este es conocido como el teorema de la divergencia.

Veamos su demostración. Primero calculamos la integral de superficie a la derecha de la ecuación (4.45). Como puede verse de la figura 4.3, la integral de superficie puede realizarse integrando sobre superficies más pequeñas como la que se muestra. La suma de todas las integrales correspondientes a estas pequeñas superficies equivale a la integral sobre la superficie exterior  $S$  ya que las integrales de las superficies compartidas por dos volúmenes vecinos se cancelan ya que sus diferenciales de superficie tienen la misma magnitud pero sentido contrario. Entonces, podemos escribir la integral de superficie total como

{sumavol1}

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (4.46)$$

Ahora calculamos sólo una de estas integrales sobre una superficie  $S_i$  que contiene un volumen  $V_i$ . Suponiendo que este volumen es un diferencial como el que se muestra en la figura 4.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_{S_{i1}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_1 + \int_{S_{i2}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_2 + \int_{S_{i3}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_3 \\ &+ \int_{S_{i4}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_4 + \int_{S_{i5}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_5 + \int_{S_{i6}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_6 \end{aligned} \quad (4.47)$$

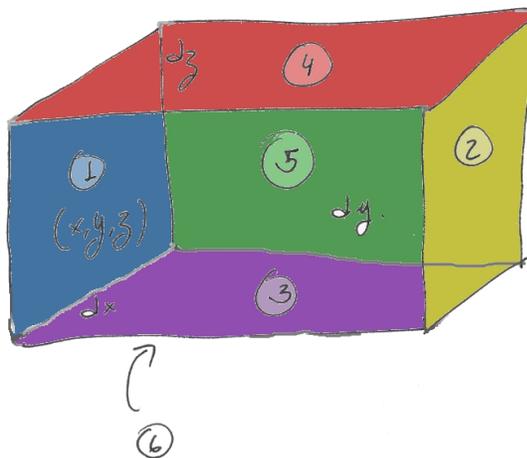


Figura 4.4: Teorema de la divergencia. Volumen  $V$  y superficie  $S_i$ . Se puede ver que la superficie  $S_i$  está compuesta de las seis caras del paralelepípedo  $S_{i1}$ ,  $S_{i2}$ ,  $S_{i3}$ ,  $S_{i4}$ ,  $S_{i5}$  y  $S_{i6}$

donde  $S_{i1}$ ,  $S_{i2}$ ,  $S_{i3}$ ,  $S_{i4}$ ,  $S_{i5}$  y  $S_{i6}$  son las seis caras del paralelepípedo del diferencial de volumen que se muestra en la figura 4.4. Los diferenciales de volumen son

$$d\sigma_1 = -d\sigma_2 = -j dx dz, \quad (4.48)$$

$$d\sigma_3 = -d\sigma_4 = -k dx dy, \quad (4.49)$$

$$d\sigma_5 = -d\sigma_6 = -i dy dz. \quad (4.50)$$

$$(4.51)$$

Si suponemos que uno de los vértices del paralelepípedo se encuentra en el punto  $(x, y, z)$  vemos que, en el interior del diferencial de volumen, el campo vectorial se puede expandir como

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{F} \quad (4.52)$$

entonces

$$\mathbf{F}(x + dx, y + dy, z + dz) = \mathbf{F}(x, y, z) + d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{F}(x, y, z) \quad (4.53)$$

o bien

$$\mathbf{F}(x + dx, y + dy, z + dz) = \mathbf{F}(x, y, z) + d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{F}(x, y, z). \quad (4.54) \quad \{\text{expandf1}\}$$

Sustituyendo (4.54) en la integral de superficie (4.47) obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_{S_{i1}} [d\mathbf{r} \cdot \nabla] \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma}_1 + \int_{S_{i2}} [d\mathbf{r} \cdot \nabla] \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma}_2 \\ &+ \int_{S_{i3}} [d\mathbf{r} \cdot \nabla] \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma}_3 + \int_{S_{i4}} [d\mathbf{r} \cdot \nabla] \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma}_4 \\ &+ \int_{S_{i5}} [d\mathbf{r} \cdot \nabla] \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma}_5 + \int_{S_{i6}} [d\mathbf{r} \cdot \nabla] \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma}_6 \quad (4.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= - \int_x^{x+dx} \int_z^{z+dz} [d\mathbf{r} \cdot \nabla] F_y(x, y, z) dx dz \\
&+ \int_x^{x+dx} \int_z^{z+dz} [(d\mathbf{r} + \mathbf{j} dy) \cdot \nabla] F_y(x, y, z) dx dz \\
&- \int_x^{x+dx} \int_y^{y+dy} [d\mathbf{r} \cdot \nabla] F_z(x, y, z) dx dy \\
&+ \int_x^{x+dx} \int_y^{y+dy} [(d\mathbf{r} + \mathbf{k} dz) \cdot \nabla] F_z(x, y, z) dx dy \\
&- \int_y^{y+dy} \int_z^{z+dz} [d\mathbf{r} \cdot \nabla] F_x(x, y, z) dy dz \\
&+ \int_y^{y+dy} \int_z^{z+dz} [(d\mathbf{r} + \mathbf{i} dx) \cdot \nabla] F_x(x, y, z) dy dz \\
&= \int_x^{x+dx} \int_z^{z+dz} (\mathbf{j} dy \cdot \nabla) F_y(x, y, z) dx dz \\
&+ \int_x^{x+dx} \int_y^{y+dy} (\mathbf{k} dz \cdot \nabla) F_z(x, y, z) dx dy \\
&+ \int_y^{y+dy} \int_z^{z+dz} (\mathbf{i} dx \cdot \nabla) F_x(x, y, z) dy dz \\
&= \int_x^{x+dx} \int_z^{z+dz} \frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y, z) dx dy dz \\
&+ \int_x^{x+dx} \int_y^{y+dy} \frac{\partial}{\partial z} F_z(x, y, z) dx dy dz \\
&+ \int_y^{y+dy} \int_z^{z+dz} \frac{\partial}{\partial x} F_x(x, y, z) dx dy dz \\
&= \left[ \frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} F_z(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial x} F_x(x, y, z) \right] dx dy dz \\
&= \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) dx dy dz = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) d\boldsymbol{\tau}_i \\
&= \int_{V_i} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) d\boldsymbol{\tau}, \tag{4.56}
\end{aligned}$$

es decir, la integral de superficie de  $\mathbf{F}$  es equivalente a un diferencial de volumen multiplicado por la divergencia del campo vectorial. Sustituyendo el resultado de (4.56) en (4.46) obtenemos que

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \int_{V_i} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) d\boldsymbol{\tau} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) d\boldsymbol{\tau}. \tag{4.57}$$

Con esto queda demostrado el teorema de la divergencia.

Si estudiamos el caso particular de un diferencial de volumen  $\Delta V$  encerrado en una

superficie  $\Delta S$  vemos que

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot \mathbf{F} \Delta V \quad (4.58)$$

entonces, una definición alternativa de la divergencia sería

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (4.59)$$

De esta última ecuación puede inferirse que, la divergencia de un campo vectorial equivale al flujo total del mismo campo escalar por unidad de volumen en la localidad en la que fue calculada la divergencia.

### 4.5.1. Ejemplo de Aplicación del Teorema de la Divergencia

Como ejemplo utilicemos el resultado de la sección 4.4.1 En este vimos que la integral de superficie (4.44) es

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 18\pi \quad (4.60)$$

Esta integral también puede calcularse utilizando el teorema de la divergencia, es decir,

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau. \quad (4.61) \quad \{\text{ejemvol}\}$$

Vemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot [6z\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} - x\mathbf{k}] = \frac{\partial(6z)}{\partial x} + \frac{\partial(2x + y)}{\partial y} + \frac{\partial(-x)}{\partial z} = 1, \quad (4.62)$$

por lo que la integral de volumen (4.61) puede calcularse como

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \int_V (1) d\tau = \int_{r=0}^{r=3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{y=0}^{y=8} r dr d\theta dy \\ &= \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=3} \left( \frac{\pi}{2} \right) (8) = \frac{9}{2} \frac{\pi}{2} 8 = 2 \times 9\pi = 18\pi. \end{aligned} \quad (4.63)$$

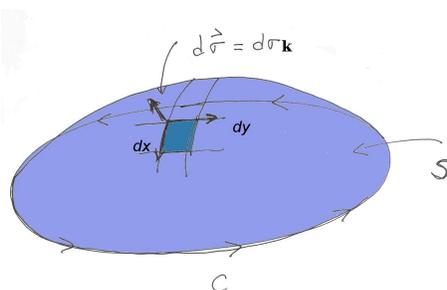
Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo de la sección 4.4.1 tal como se espera del teorema de la divergencia.

## 4.6. Teorema de Green

## 4.7. Teorema de Stokes. Interpretación del rotacional

Si  $\mathbf{F}(x, y, z)$  es un campo vectorial,  $C$  es una curva cerrada y en cuyo interior se puede definir una superficie  $S$ , como se muestra en la figura 4.5, entonces

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.64) \quad \{\text{teorot1}\}$$

Figura 4.5: Teorema de Stokes. Circuito  $C$  y superficie  $S$ .

{stokes1}

Este es conocido como el teorema de Stokes o del rotacional. Veamos la demostración del teorema de Stokes. Es posible descomponer la integral de línea en una infinidad de circuitos  $C_i$ . Como puede verse en la figura 4.6 las integrales de línea de dos circuitos contiguos se cancelan en las ramas que comparten dado que estas se llevan a cabo en direcciones opuestas. Se puede decir entonces que

$$\{\text{sumacirc1}\} \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.65)$$

Ahora calculamos una integral de línea sobre uno de estos diferenciales de circuito  $C_i$

$$\begin{aligned} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_{i1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{C_{i2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &\quad + \int_{C_{i3}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3 + \int_{C_{i4}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_4. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Sobre cada diferencial de superficie podemos establecer un sistema de coordenadas  $xyz$  y escribir las integrales de trayectoria anteriores como

$$\begin{aligned} &\int_{C_{i1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{C_{i2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &= \int_x^{x+dx} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{i} dx - \int_x^{x+dx} \mathbf{F}(x, y+dy, z) \cdot \mathbf{i} dx \\ &= \int_x^{x+dx} \left\{ \mathbf{F}(x, y, z) - \left[ \mathbf{F}(x, y, z) + dy \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F}(x, y, z) \right] \right\} \cdot \mathbf{i} dx \\ &= -dy \int_x^{x+dx} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{i} dx = -dy \int_x^{x+dx} \frac{\partial}{\partial y} F_x(x, y, z) dx \\ &= -dxdy \frac{\partial}{\partial y} F_x(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.67)$$

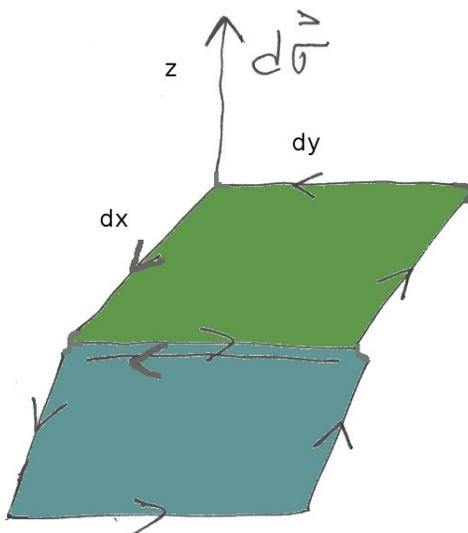


Figura 4.6: Teorema de Stokes. La superficie  $S$  está formada por múltiples superficies  $S_i$ . Se puede ver que la superficie  $S_i$  está contenida en el circuito  $C_i$  que tiene los cuatro lados de un cuadrado  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$ ,  $C_{i3}$  y  $C_{i4}$ .

{stokes2}

Análogamente podemos ver que

$$\begin{aligned}
 \int_{C_{i3}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3 + \oint_{C_{i4}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_4 &= \int_y^{y+dy} \mathbf{F}(x+dx, y, z) \cdot \mathbf{j} dy - \int_y^{y+dy} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{j} dy \\
 &= \int_y^{y+dy} \left\{ \left[ \mathbf{F}(x, y, z) + dx \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(x, y, z) \right] - \mathbf{F}(x, y, z) \right\} \cdot \mathbf{j} dy \\
 &= dx \int_y^{y+dy} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{j} dy = dx \int_y^{y+dy} \frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y, z) dy \\
 &= dx dy \frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Sustituyendo (4.67) y (4.68) en (4.66) obtenemos

$$\oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dx dy \left[ \frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} F_x(x, y, z) \right]. \tag{4.69}$$

El término entre brackets en la ecuación anterior es la componente  $z$  del rotacional de  $\mathbf{F}$ . También es la componente del rotacional a lo largo del vector de superficie  $d\boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{k} dx dy$ , entonces

$$\oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dx dy = \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{4.70}$$

Sustituyendo este resultado en (4.65) obtenemos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (4.71)$$

Con esto queda demostrado el teorema del rotacional.

Si aplicamos el teorema del rotacional para un circuito muy pequeño al rededor de un punto, el teorema del rotacional toma la forma

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \Delta S, \quad (4.72)$$

eligiendo un diferencial de superficie paralelo al rotacional del campo  $\mathbf{F}$  tenemos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}}{\Delta S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.73)$$

Entonces podemos decir que el rotacional nos da una medida de que tango gira un campo vectorial en torno a un punto. La dirección del rotacional es perpendicular al plano de giro.

## 4.8. Campo vectorial solenoidal

Se define como campo solenoidal a un campo vectorial cuyo rotacional es cero.

Veamos un ejemplo del teorema de stokes con el campo solenoidal dado por

$$\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}. \quad (4.74)$$

Si integramos este campo a lo largo de una trayectoria  $C$  dada por la circunferencia de radio  $a$  que se muestra en la figura 4.7 obtenemos que

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-a \sin \theta \mathbf{i} + a \cos \theta \mathbf{j}) \cdot (-a \sin \theta \mathbf{i} + a \cos \theta \mathbf{j}) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 d\theta = 2\pi a^2. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Si calculamos primero el rotacional del potencial vectorial  $\mathbf{F}$  obtenemos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = 2\mathbf{k} \quad (4.76)$$

y la integral de superfici sobre el disco  $S$  es entonces

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^a \int_0^{2\pi} 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} r dr d\theta = 2\pi a^2. \quad (4.77)$$

Se puede hacer la integral de superficie también sobre la semiesfera como se muestra en

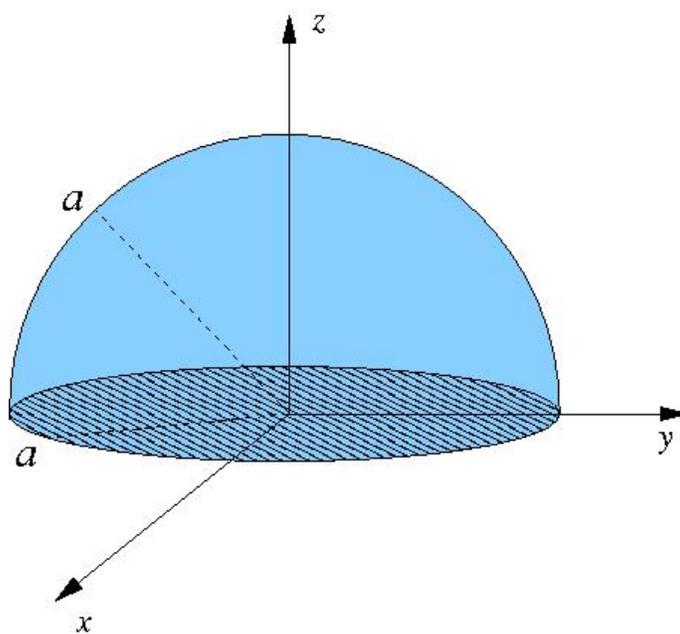


Figura 4.7: Teorema del rotacional: La integral sobre el disco es igual a la integral sobre la semiesfera.

la figura 4.7. La integral sobre la semiesfera toma la forma

$$\begin{aligned}
 \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2\mathbf{k} \cdot (\sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= 2a^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi a^2
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

con lo que se prueba el teorema del rotacional para este ejemplo.

Es interesante notar que  $\nabla \times \mathbf{F}$  no es cero y por lo tanto la integral de línea de  $\mathbf{F}$  es distinta de cero. Además,  $\mathbf{F} \neq \nabla\varphi$  entonces es imposible escribir a  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  como una diferencial exacta. Sin embargo  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ , esta es precisamente la definición de los campos solenoidales.

## 4.9. Ecuación de Laplace

Si un campo está dado por el gradiente de un escalar

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi \tag{4.79}$$

y su divergencia es distinta de cero

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \psi \tag{4.80}$$

entonces la función escalar cumple la ecuación de Laplace

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \psi. \tag{4.81}$$

## 4.10. Potencial escalar y vectorial

Como ya hemos visto, si el rotacional de un campo vectorial es cero entonces el campo vectorial puede escribirse como el gradiente de un campo según la ecuación (3.39)

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{F} &= 0 \\
 \mathbf{F} &= \nabla\varphi.
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

Al campo escalar  $\varphi$  se le conoce como potencial escalar.

Si por otro lado, la divergencia de un campo vectorial es cero, entonces, de la ecuación (3.40), vemos que este campo debe ser el rotacional de algún otro campo

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{F} &= 0 \\
 \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{A}.
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

El campo vectorial  $\mathbf{A}$  recibe el nombre de campo vectorial.

### 4.11. Teorema de Helmholtz

Como hemos visto, un campo vectorial puede ser:

**Campo irrotacional** . Su rotacional es cero y por lo tanto puede ser expresado como el gradiente de un campo escalar

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (4.84)$$

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi. \quad (4.85)$$

**Campo solenoidal** . Su divergencia es cero y por lo tanto puede expresarse como el rotacional de un campo vectorial

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (4.86)$$

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.87)$$

El teorema de Helmholtz establece que cualquier campo vectorial puede escribirse como la superposición de un campo solenoidal y otro irrotacional de la forma

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.88)$$

En el caso de un campo irrotacional  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  y en el caso de un campo solenoidal  $\varphi = 0$ .



# Capítulo 5

## Tensores Cartesianos

### 5.1. Objetivos Específicos

1. Estudiar el análisis tensorial
2. Estudiar algunas relaciones vectoriales utilizando las herramientas de tensores

### 5.2. Leyes de transformación tensorial

Se puede distinguir a un tensor por su orden y su dimensión. Un número real es un tensor de orden cero, un vector es un tensor de orden uno y una matriz es un tensor de orden 2. Un vector tridimensional es un tensor de primer orden con dimensión tres. Una matriz de  $3 \times 3$  es un tensor de segundo orden de dimensión 3.

Los tensores se representan de la siguiente forma. La  $i$ -ésima, componente de un vector  $\mathbf{A}$  es

$$A_i = (\mathbf{A})_i \tag{5.1}$$

se dice que  $A_i$  es un tensor de primer orden. El tensor  $A_{ij}$  es un tensor de segundo orden,  $A_{ijk}$  es un tensor de tercer orden y así sucesivamente.

### 5.3. Operaciones algebraicas elementales

#### 5.3.1. Producto y contracción. Convención de suma de Einstein

El producto  $\mathbf{B}$  de una matriz  $M$  por un vector  $\mathbf{A}$  puede representarse de manera vectorial como

$$B_i = \sum_j M_{ij} A_j. \tag{5.2} \quad \{\text{prodtens1}\}$$

La convención de Einstein consiste en omitir el símbolo de la sumatoria siempre que dos subíndices se repitan. De esta manera, la ecuación (5.2) puede escribirse como

$$B_i = M_{ij} A_j. \tag{5.3}$$

La convención de Einstein pide también que un índice no se repita más de dos veces.

Cuando un índice se encuentra repetido se dice que este índice está contraído.

Algunos ejemplos de productos de tensores pueden ser

$$B_{ijk} = \sum_{lmn} M_{iljmkn} A_{lmn} = B_{ijk} = M_{iljmkn} A_{lmn}, \quad (5.4)$$

$$B = \sum_{ijk} A_{ijk} M_{kij} = B = A_{ijk} M_{kij}, \quad (5.5)$$

$$B_k = \sum_{ij} A_i M_{ij} C_{jk} = B_k = A_i M_{ij} C_{jk}. \quad (5.6)$$

### 5.3.2. Suma

La suma de dos tensores se da término a término. Por ejemplo, la suma de dos vectores puede escribirse como

$$C_i = A_i + B_i, \quad (5.7)$$

la suma de dos matrices como

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \quad (5.8)$$

La suma de dos tensores de cuarto orden puede escribirse como

$$C_{ijkl} = A_{ijkl} + B_{ijkl}. \quad (5.9)$$

### 5.3.3. Producto

### 5.3.4. Simetría o antisimetría de un tensor

Supongamos que tenemos un tensor  $A_{ij}$  de segundo orden. Este puede reescribirse como

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}) = B_{ij} + C_{ij} \quad (5.10)$$

donde

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) \quad (5.11)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}). \quad (5.12)$$

$B_{ij}$  es la parte simétrica del tensor ya que  $B_{ij} = B_{ji}$  y  $C_{ij}$  es la parte antisimétrica del tensor ya que  $C_{ij} = -C_{ji}$ .

## 5.4. La delta de Kroneker y el tensor de Levi-Civita

El tensor delta de Kroneker se define de la siguiente forma

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5.13)$$

La propiedad más interesante de la delta es que contraída con uno de los índices de un tensor da por resultado el mismo tensor

$$A_{ijkl} = \delta_{lm} A_{ijkm}. \quad (5.14)$$

El tensor de Levi-Civita se define como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i = j \text{ o } i = k \text{ o } j = k \\ 1, & ijk \text{ par} \\ -1, & ijk \text{ impar} \end{cases}. \quad (5.15)$$

Si cualquiera de los índices está repetido  $\epsilon_{ijk} = 0$ , si la permutación  $ijk$  es par entonces  $\epsilon_{ijk} = 1$  y si esta permutación es impar entonces  $\epsilon_{ijk} = -1$ . Por ejemplo

$$\begin{aligned} \epsilon_{112} &= 0, & \epsilon_{123} &= 1, & \epsilon_{213} &= -1, \\ \epsilon_{212} &= 0, & \epsilon_{312} &= 1, & \epsilon_{321} &= -1, \\ \epsilon_{233} &= 0, & \epsilon_{231} &= 1, & \epsilon_{132} &= -1. \end{aligned} \quad (5.16)$$

De la definición del tensor de Levi-Civita es fácil ver que

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki} \quad (5.17)$$

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj}. \quad (5.18)$$

#### 5.4.1. Representación del producto punto

Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son vectores y  $A_i$  y  $B_i$  son sus componentes, entonces, el producto punto de ellos puede escribirse como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i = A_i \delta_{ij} B_j. \quad (5.19)$$

#### 5.4.2. Representación del producto cruz

El producto cruz de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  puede representarse en notación tensorial como

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (5.20)$$

De esta identidad puede deducirse la anticonmutación del producto cruz

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i &= \epsilon_{ijk} A_j B_k = -\epsilon_{ikj} B_k A_j \\ &= -\epsilon_{ijk} B_j A_k = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})_i \end{aligned} \quad (5.21)$$

En la sección 1.8.3 estudiamos el triple producto dado por la ecuación (1.46) que puede ponerse en forma tensorial como

$$\begin{aligned} ([\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{C})_i &= ([\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}] \mathbf{B} - [\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}] \mathbf{A})_i \\ \epsilon_{jmn} A_m B_n \epsilon_{ijk} C_k &= C_k A_k B_i - C_k B_k A_i \\ \epsilon_{jki} \epsilon_{jmn} A_m B_n C_k &= C_k \delta_{km} A_m B_i - C_k \delta_{kn} B_n A_i \\ \epsilon_{jki} \epsilon_{jmn} A_m B_n C_k &= C_k \delta_{km} A_m \delta_{ni} B_n - C_k \delta_{kn} B_n \delta_{mi} A_m \\ \epsilon_{jki} \epsilon_{jmn} A_m B_n C_k &= (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) A_m B_n C_k. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Pasando el lado derecho de esta última ecuación a la izquierda y factorizando tenemos que

$$[\epsilon_{jki}\epsilon_{jmn} - (\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im})] A_m B_n C_k = 0. \quad (5.23)$$

Dado que los tensores  $A_m$ ,  $B_n$  y  $C_k$  son completamente arbitrarios,

$$\epsilon_{jki}\epsilon_{jmn} = \delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}, \quad (5.24) \quad \{\text{doblepsilon1}\}$$

que renombrando los índices tiene la forma

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}. \quad (5.25) \quad \{\text{doblepsilon2}\}$$

Esta relación es de gran utilidad en la deducción de identidades vectoriales o diferenciales como las que se muestran en (3.34)-(3.42).

## 5.5. El operador nabla en terminos tensoriales

La  $i$ -ésima componente del operador gradiente puede representarse como

$$(\nabla)_i = \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (5.26)$$

### 5.5.1. El gradiente de un escalar y un vector

Puede verse que el gradiente de un escalar es entonces

$$(\nabla\varphi)_i = \nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}. \quad (5.27)$$

En varias ocasiones en el texto a surgido la derivada direccional de un vector  $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$  que en notación vectorial puede escribirse como

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_i = A_j \nabla_j B_i = A_j \frac{\partial}{\partial x_j} B_i \quad (5.28)$$

y de esta puede verse que

$$(\nabla \mathbf{B})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} B_j. \quad (5.29)$$

### 5.5.2. La divergencia de un vector y de una matriz

La divergencia de un vector es el producto punto del operador nabla por el vector entonces, en notación vectorial

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla_i A_i = \frac{\partial}{\partial x_i} A_i. \quad (5.30)$$

De manera similar, la divergencia de un tensor de segundo orden o matriz sería

$$B_i = \nabla_j A_{ij} \quad (5.31)$$

y la de un tensor de orden superior puede escribirse como

$$B_{ijklm} = \nabla_n A_{ijklmn}. \quad (5.32)$$

### 5.5.3. El rotacional de un vector

El rotacional de un vector es el producto cruz del operador nabra por un campo vectorial, entonces

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k. \quad (5.33)$$

De las propiedades (5.17) y (5.18) pueden demostrarse fácilmente las relaciones vectoriales (3.39) y (3.40). Comenzamos con (3.39). El rotacional del gradiente de un escalar se escribe como

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \varphi)_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \\ &= -\epsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

entonces

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad (5.35)$$

entonces, el rotacional del gradiente de un campo escalar es cero

$$(\nabla \times \nabla \varphi)_i = 0. \quad (5.36)$$

Similarmente, la divergencia de un rotacional puede escribirse en notación tensorial como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= -\epsilon_{jik} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j \partial x_i} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

En esta última expresión vemos que  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$  es igual a su negativo

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (5.38)$$

entonces

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (5.39)$$

### 5.5.4. El laplaciano de un escalar y de un vector

El operador laplaciano es el producto punto de dos operadores nabra

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (5.40)$$

## 5.6. Algunas identidades

Veamos un ejemplo de como aplicar la relación (5.25) en la demostración de la identidad (3.37). En forma tensorial, la identidad (3.37) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times [\mathbf{u} \times \mathbf{v}])_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{klm} u_l v_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j} u_l v_m \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \left( v_m \frac{\partial}{\partial x_j} u_l + u_l \frac{\partial}{\partial x_j} v_m \right) \\
 &= v_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - v_i \frac{\partial}{\partial x_j} u_j + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_j - u_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \\
 &= (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u})_i - (\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u})_i + (\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v})_i
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

esto concluye la demostración de (3.37).

# Bibliografía