Campos II

Carlos Sotelo Llamas
José Luis Cardoso Cortés
Alejandro Kunold Bello

Escrito con $\LaTeX\,2_\varepsilon$

16 de junio de 2006

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Soluciones de Series de Ecuaciones Diferenciales: Funciones Espaciales

1.1. La función Gama

La función gama se puede definir como [1]

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.1}$$

Integrando por partes puede verse que

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z} dt = -\left[t^z e^{-t}\right]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Se puede ver que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \tag{1.3}$$ {gama2}

De las ecuaciones (1.2) y (1.3) puede verse que

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{1.4}$$

Otra relación importante es

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1/2} dt = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{1.5}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $x^2 = t$.

Otra definición alternativa de la función $\Gamma(z)$ es [2]

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n)} n^z. \tag{1.6}$$

Es fácil notar que las propiedades (1.2) y (1.3) se observa de esta definición. Veamos en particular la propiedad (1.2).

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n+1)} n^{z+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{zn}{z+n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n)} n^z \\ &= z \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n)} n^z \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ahora vemos la propiedad (1.3)

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n(n+1)} n^1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n(n+1)} (n+1) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n(n+1)} = 1 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ahora demostramos que ambas definiciones son equivalentes definiendo la función

{gama4}

$$F(z,n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt. \tag{1.9}$$

Dado que

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \tag{1.10}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z). \tag{1.11}$$

En (1.9) hacemos el cambio de variable $u = t/n$ e integrando obtenemos

$$\begin{aligned}
F(z,n) &= n^z \int_0^1 \left[(1-u)^n u^{z-1}\right] du \\
&= n^z \left\{ \left[(1-u)^n \frac{u^z}{z}\right]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du \right\} \\
&= n^z \frac{n}{z} \left\{ \left[(1-u)^{n-1} \frac{u^{z+1}}{z+1}\right]_0^1 + \frac{n-1}{z+1}\int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{z+1} du \right\} \\
&= n^z \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \left\{ \left[(1-u)^{n-2} \frac{u^{z+2}}{z+2}\right]_0^1 + \frac{n-2}{z+2}\int_0^1 (1-u)^{n-3} u^{z+2} du \right\} \\
&= n^z \frac{n(n-1)(n-2)}{z(z+1)(z+2)} \int_0^1 (1-u)^{n-3} u^{z+2} du \\
&= n^z \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+k)} \int_0^1 (1-u)^{n-k-1} u^{z+k} du \\
&= n^z \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{z(z+1)(z+2)\dots[z+(n-1)]} \int_0^1 u^{z+n-1} du \\
&= n^z \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots[z+(n-1)]} \left[\frac{u^{z+n}}{z+n}\right]_0^1 \\
&= n^z \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots[z+(n-1)](z+n)} \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) = \Gamma(z)\,. \qquad (1.13)$$

1.2. Propiedades de Series de Potencias

Una clase grande de ecuaciones diferenciales ordinarias poseen soluciones que se pueden expresar, sobre un cierto intervalo, en términos de series de potencias y series relacionadas. Antes de investigar métodos de obtencion de tales soluciones, repasaremos sin evidencia ciertas propiedades útiles de series de potencias.

Una expresión de la forma

$$A_0 + A_1(x-x_0) + \cdots + A_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n \qquad (1.14)$$ {1}

es llamada una serie de potencias y está definida como el límite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} A_n(x-x_0)^n$$

para esos valores de x para el cual el limite existe. Para tales valores de x se dice que las series *convergen*. En este capítulo suponemos que la variable x y los coeficientes son reales; las series de potencias *complejas* se tratarán en el Capítulo 10.

Para determinar que valores de x la serie (1.14) converge, debemos hacer uso del *criterio del cociente*, el cual establece que, si el valor absoluto de la relación del término $(n+1)$ al término n-esimo en cualquier serie infinita se aproxima al límite ρ cuando $n \to \infty$, entonces la serie converge cuando $\rho < 1$ y diverge cuando $\rho > 1$. La prueba no es correcta si $\rho = 1$. Una prueba más delicada establece que, si el valor absoluto de la misma relación es limitada por algun número σ cuando $n \to \infty$, entonces las series convergen cuando $\sigma < 1$. En el caso de las series de potencias (1.14) obtenemos

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{A_{n+1}}{A_n}||x - x_0| = L|x - x_0|,$$

donde

{2} $$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|, \tag{1.15}$$

si el último límite existe. En este caso sigue que (1.14) *converge* cuando

$$|x - x_0| < \frac{1}{L}$$

y *diverge* cuando

$$|x - x_0| > \frac{1}{L}$$

De esta manera, cuando L existe y es finito, un *un intervalo de convergencia*

$$(x_0 - \frac{1}{L}, x_0 + \frac{1}{L})$$

es determinado simétricamente alrededor del punto x_0 tal que adentro del intervalo la serie converge y afuera del intervalo diverge. La distancia $R = \frac{1}{L}$ es frecuentemente llamada el *radio de convergencia*.

El comportamiento de la serie en el punto final del intervalo no es determinado por el criterio del cociente. Pruebas utiles para la investigación de la convergencia de las dos series de constantes que corresponden a los puntos finales $x = x_0 \pm R$ son:

(1) Si, en un punto final, los términos sucesivos de las series alternan en signo para valores suficientemente grandes de n, las series convergen si después de una cierta etapa los términos sucesivos siempre decrecen en magnitud y si el n-ésimo término se aproxima a cero y la serie diverge si el n-ésimo término no tiende a cero.

(2) Si, en un punto final, los términos sucesivos de la serie son *son de signo constante*, y si la relación del termino $(n+1)$ al n-esimo termino puede ser escrita de la forma

$$1 - \frac{k}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

donde k es independiente de n y θ_n es limitada cuando $n \to \infty$, entonces la serie converge si $k > 1$ y diverge si $k \leqq 1$. Debe hacerce notar que esta prueba es aplicable aún en el caso cuando $k = 1$, siempre que una expresión de la forma indicada pueda ser obtenida. Nos referiremos a esta prueba como la prueba de *Raabe*.

Ejemplo.Para ilustrar, consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)(x-a)^n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+n)},$$

donde α no es un integrador negativo. En este caso obtenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} |\frac{n+1}{\alpha+n+1}| = 1.$$

Por lo tanto el intervalo de convergencia esta dado por $|x-a| < 1$ o

$$a - 1 < x < a + 1.$$

Cuando $x = a - 1$, el signo de los terminos sucesivos alternan cuando $n > -\alpha$. Aparte del signo algebráico, el n-esimo término is entonces

$$\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+n)} = \frac{n!\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Alusión a la Ecuación (61) del Capítulo 2 muestra que esta relación es aproximada por $\Gamma(\alpha+1)n^{-\alpha}$ cuando n es grande, y por lo tanto se aproxima a cero mientras n se incrementa solo si $\alpha > 0$. De esta manera las series convergen en $x = a - 1$ si $\alpha > 0$, y de otra manera diverge en $x = a-1$. Cuando $x = a+1$, los t'erminos son de signo constante cuando $n > -\alpha$. La relación de términos consecutivos es entonces

$$\frac{n+1}{n+\alpha+1} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{n(n+\alpha+1)}.$$

Por lo tanto, para la prueba de *Raabe* con $\theta_n = [\alpha(\alpha+1)n]/(n+\alpha+1)$, la serie converge en $x = a + 1$ si $\alpha > 1$ y de otro modo diverge en $x = a + 1$.

Se podría hacer notar que si L es cero el intervalo de convergencia incluye todos los valores de x. De cualquier modo, si L es infinita, la serie converge solo en el punto $x = x_0$. De todos modos el límite L existe, es sabido que siempre, para las series de potencias (1.14), o las series de potencias convergen solo cuando $x = x_0$, o las series convergen en todas partes, o existe un número positivo R tal que las series convergen cuando $|x - x_0| < R$ y divergen cuando $|x - x_0| > R$.

Podría suceder que las series (1.14) contubieran solo términos para los cuales n es una integral múltiple de un número entero $N > 1$, y por lo tanto es de la forma

$$A_0 + A_N(x-x_0)^N + A_{2N}(x-x_0)^{2N} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} A_{kN}(x-x_0)^{kN}, \tag{1.16}$$ {3}

o es un producto de una potencia de $x - x_0$ y semejante a una serie. Los ejemplos son proporcionados por las series

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (|x| < \infty)$$

y

$$\log \frac{1+x^2}{1-x^2} = 2(x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + \cdots) = 2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{2k+1} \qquad (|x| < 1),$$

para el cual $N = 2$ y 4, respectivamente. En tales casos, la relación $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ esta indefinida para infinidad de valores de n. El valor absoluto limitado de la relación de términos sucesivos es

$$\rho_N = \lim_{k \to \infty} |\frac{A_{(k+1)N}}{A_{kN}}||x - x_0|^N = L_N |x - x_0|^N,$$

donde

{4} $$L_N = \lim_{k \to \infty} |\frac{A_{(k+1)N}}{A_{kN}}|, \tag{1.17}$$

si ese límite existe, y la serie converge cuando $L_N|x - x_0|^N < 1$, o

{5} $$|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt[N]{L_N}} \tag{1.18}$$

Una propiedad útil particular de las series de potencias es el hecho de que las series de potencias convergentes pueden ser tratadas, por muchas propuestas, en el mismo sentido como polinomios. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias representa una función continua de x de derivadas continuas de todos los ordenes. Dentro de este intervalo, una serie de potencias puede ser integrada o deferenciada término por término, como en el caso de un polinomio y la series resultantes convergeran, *en el mismo intervalo*, a la integral o derivada de la función representada por la serie original. Además, dos series de potencias en $x - x_0$ pueden ser multiplicadas juntas término por término y las series resultantes convergeran al producto de las funciones representadas por la serie original, *dentro del intervalo general de convergencia*. Una declaración similar aplica a la división de una serie por otra, estipulo que el denominador no es cero en x_0. Aquí la serie resultante convergerá a la relación en algun subintervalo del intervalo general de convergencia.

Para la declaración de la multiplicación de término por t'ermino de la serie de potencias, es decir (tomando $x_0 = 0$ por simplicidad) que, si

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad (|x| < R_1)$$

y

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \qquad (|x| < R_2),$$

donde R_1 y R_2 son positivas, entonces

$$f(x)g(x) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

al menos para $|x| < min(R_1, R_2)$, donde

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$

{6} $$= \sum_{i=0}^{k} a_i b^{k-i}. \quad (1.19)$$

Con respecto a la *división* de serie de potencias, es decir que bajo la misma suposición, junto con el requerimiento de que $b_0 \neq 0$, tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k,$$

en algún intervalo $|x| < R$, donde las d's son determinadas por las relaciones

$$a_i = \sum_{k=0}^{i} b_{i-k} d^k \cdots (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.20)$$ {7}

Ya que estas condiciones toman la forma

$$a_0 = b_0 d_0,$$

$$a_1 = b_1 d_0 + b_0 d_1,$$

$$y a_2 = b_2 d_0 + b_0 1 d_1 + b_0 d_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

sigue que, con $b_0 \neq 0$, la primera ecuación nos da d_0, el segundo nos da d_1, y así sucesivamente.

Ahora se supone que las series $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n$ converge en un intervalo no cero alrededor de $x - x_0$ y por lo tanto representa una función, dicha $f(x)$, en el intervalo,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n. \quad (1.21)$$ {8}

Entonces, diferenciando ambos lados de la Equation (1.21) k veces y estableciendo $x - x_0$ en el resultado, obtenemos

$$f^{(k)}(x_0) = k! A_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

y por lo tanto (1.21) se convierte en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (1.22)$$ {9}

Esta es la llamada *serie de Taylor* expanción de $f(x)$ aproximando $x = x_0$. Es claro que no todas las funciones poseen tal expansión, ya que, en particular, a fin de que (1.22) sea definida, *todas las derivadas* de $f(x)$ deben existir en $x = x_0$. Una función que posea tal expansión se dice que es *regular* en $x = x_0$., tiene *solamente una* expansi'on en potencias de $x = x_0$ y esa expansión esta dada por (1.22).

Si $f(x)$ y todas sus derivadas son continuas en un intervalo incluyendo $x = x_0$, entonces $f(x)$ puede ser expresado como una serie de Taylor *finita* más un restante, en la forma

{10}
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_N(x). \tag{1.23}$$

De aquí R_N, lo restante después de N términos, esta dado por

{11}
$$R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}(x - x_0)^N, \tag{1.24}$$

donde ξ es un punto en el intervalo (x_0, x). Para mostrarlo la expansión (1.22) es valida, por lo tanto $f(x)$ es fijo en x_0, debemos mostrar que $R_N(x) =\longrightarrow 0$ como $N \to \infty$ para valores de x en un intervalo incluyendo $x = x_0$. Una prueba la cual es mucho más facilmente aplicada y la cual es suficiente en el caso de más funciones ocurriendo en practica consiste en determinar si la serie formal en la Ecuación (1.22) converge en un intervalo alrededor de $x = x_0$.

Parece ser, en particular, que cualquier *polinomio* en x es fijo para toda x. Además, cualquier *función racional* (razón de polinomios) es fijo para todos los valores de x los cuales no son ceros en el denominador.

1.3. Ejemplos Ilustrativos

Para ilustrar el uso de series de potencias para obtener soluciones de ecuaciones deferenciales, primero consideramos la solución de tres ecuaciones lineales especificas de segundo orden.

(1) Para resolver la ecuación diferencial

{12}
$$Ly \equiv \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0, \tag{1.25}$$

proponemos una solución de la forma

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \cdots$$

y asumimos que las series convergen en un intervalo incluyendo $x = 0$. Diferenciando dos veces término por término, entonces obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A_2 + 6A_3 x + 12A_4 x^2 + 20A_5 x^3 + \cdots .$$

Con la forma asumida para y sigue que

$$Ly = (2A_2 - A_0) + (6A_3 - A_1)x + (12A_4 - A_2)x^2 + (20A_5 - A_3)x^3 + \cdots = 0.$$

A fin de que esta ecuación sea valida sobre un intervalo, es necesario que los coeficientes de todas las potencias de x desaparescan independientemente, dando las ecuaciones

$$2A_2 = A_0, \qquad 6A_3 = A_1, \qquad 12A_4 = A_2, \qquad 20A_5 = A_3, \qquad \cdots,$$

de la cual sigue que

$$A_2 = \frac{1}{2}A_0, \qquad A_3 = \frac{1}{6}A_1,$$
$$A_4 = \frac{1}{12}A_2 = \frac{1}{24}A_0, \qquad A_5 = \frac{1}{20}A_3 = \frac{1}{120}A_1, \qquad \cdots.$$

Entonces la solucion se convierte en

$$y = A_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots) + A_1(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots).$$

Se observa que los coeficientes A_0 y A_1 son indeterminados, y por lo tanto arbitrarios, pero esa sucesión de coeficientes son determinados en términos de ellos. La solución general es de la forma

$$y = A_0 u_1(x) + A_1 u_2(x)$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes, expresadas en serie de potencias, de las cuales los primeros tres términos han sido obtenidos. Los términos encontrados podrían ser reorganizados como los primeros términos de las series representando las soluciones conocidas $\cosh x$ y $\sinh x$. respectivamente.

Un más compacto y conveniente procedimiento usa la notación de sumatorias en lugar de no escribir ciertos términos de la serie. De esta manera escribimos solución supuesta en la forma

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

y se obtiene, por diferenciación,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2}.$$

Entonces sigue

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = 0.$$

A fin de reunir los coeficientes de las propias potencias de x, cambiamos los índices de la sumatoria de tal modo que los exponentes de x en las dos sumatorias sean iguales. Para este propósito podríamos, por ejemplo, remplazar k por $k-2$ en la segunda sumatoria, de manera que se convierte en

$$\sum_{k-2=0}^{\infty} A_{k-2}x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} A_{k-2}x^{k-2},$$

y por lo tanto

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} A_{k-2}x^{k-2} = 0.$$

Ya que los dos primeros términos ($k=0,1$) de la primera sumatoria son cero, podríamos remplazar los l'imites mas bajos por $k=2$ y entonces combinar las sumatorias para obtener

$$Ly \equiv \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)A_k - A_{k-2}]x^{k-2} = 0.$$

Evaluando para cero los coeficientes de todas las potencias de x involucradas en esta sumatoria, obtenemos la condición

$$k(k-1)A_k = A_{k-2} \qquad (k=2,3,\dots).$$

Esta condición es conocida como la *formula de recurrencia* para A_k. Esta expresa cada coeficiente A_k para el cuál $k \geqq 2$ como un multiplo del segundo coeficiente precedente A_{k-2} y se reduce a las condiciones previamente determinadas cuando $k=2,3,4$, y 5.

(2) Como un segundo ejemplo consideramos la ecuación

{13} $$Ly = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2+x)\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{1.26}$$

Suponiendo una solución de la forma

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k,$$

obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2},$$

y por lo tanto

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)A_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} kA_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} kA_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

La primera, tercera y cuarta sumatoria podrían ser combinadas para dar

$$\sum_{k=0}^{\infty}[k(k-1)+k-1]A_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2-1)A_k x^k,$$

y por lo tanto sigue

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty}(k^2-1)A_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} kA_k x^{k+1}.$$

A fin de combinar estas sumas, reemplazamos k por $k-1$ en la segunda, para obtener

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty}(k^2-1)A_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)A_{k-1}x^k.$$

Ya que el rango de las sumas difiere, el término correspondiente a $k=0$ debe ser extraído de la primera suma, después del cual el resultado de la primera suma puede ser combinado con la segunda. De este modo encontramos

$$Ly = -A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k^2-1)A_k + (k-1)A_{k-1}]x^k.$$

A fin de que Ly pueda desaparecer identicamente, el término constante,además de los coeficientes de las potencias sucesivas de x, deben desaparecer independientemente, dando la condición

$$A_0 = 0$$

y la *formula recurrente*

$$(k-1)[(k+1)A_k + A_{k-1}] = 0 \qquad (k=1,2,3,\cdots).$$

La formula de recurrencia se satisface *identicamente* cuando $k=1$. Cuando $k \geqq 2$, esto se conviente en

$$A_k = -\frac{A_{k-1}}{k+1} \qquad (k=2,3,4,\cdots).$$

Por lo tanto obtenemos

$$A_2 = -\frac{A_1}{3}, \quad A_3 = -\frac{A_2}{4} = \frac{A_1}{3\cdot 4}, \quad A_4 = -\frac{A_3}{5} = -\frac{A_1}{3\cdot 4\cdot 5}, \cdots$$

Así en este caso $A_0 = 0$, A_1 es *arbitraria*, y todos los coeficientes subsecuentes son determinados en términos de A_1. La solución se convierte en

$$y = A_1(x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} - \frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots).$$

Si esta solución es puesta de la forma

$$y = \frac{2A_1}{x}(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots)$$

$$y = \frac{2A_1}{x}[x - 1 + (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)],$$

las series en parentesis en la forma final es reconocida como la expansión de e^{-x}, y, escribiendo $2A_1 = c$, la solución obtenida podría ser puesta en la forma

$$y = c\frac{e^{-x} - 1 + x}{x}.$$

En este caso solo una solución fue obtenida. Este factor indica que cualquier soluciń linealmente independiente no puede ser expandida en serie de potencias aproximando $x = 0$. Aunque una segunda solución podría ser obtenida por el método de la Sección 1.10, un procedimiento alternativo dado en una siguiente sección es aplicado más facilmente.

(3) Como un ejemplo final consideramos la ecuación

{14} $$Ly \equiv x^3 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \tag{1.27}$$

Otra vez suponiendo una solución de la forma

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k,$$

obtenemos

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

Si k es reemplazada por $k - 1$ en la primera suma, entonces

$$Ly \equiv \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)(k-2)A_{k-1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

$$Ly \equiv A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k + (k-1)(k-2)A_{k-1}]x^k.$$

La condición $Ly = 0$ entonces requiere que

$$A_0 = 0$$

y que los coeficientes sucesivos satisfagan la formula de recurrencia

$$A_k = -(k-1)(k-2)A_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Para $k = 1$ y $k = 2$, la formula de recurrencia da $A_1 = A_2 = 0$; y ya que, de este punto, las condiciones establecidas expresan cada A como un multiplo del procedimiento uno, siguiendo que todas las $A's$ deben ser cero. Por lo tanto la única solución obtenida es la trivial $y = 0$. Por consiguiente *la ecuacion posee soluciones triviales, las cuales son fijos en* $x = 0$.

Después procedimos a una clasificación de tipos de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, y a un estudio de diferencias basicas entre los tres problemas hasta aquí considerados.

1.4. Puntos Singulares de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden

Si una ecuación diferencial lineal homogenea de segundo orden es escrita en la *forma estandar*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0, \tag{1.28}$$ {15}

el comportamiento de soluciones de la ecuación próxima a un punto $x = x_0$ es establecido para depender del comportamiento de los coeficientes $a_1(x)$ y $a_2(x)$ pr'oximo $x = x_0$. El punto $x - x_0$ es expresado para ser un *punto ordinario de la ecuación diferencial* si ambos $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son fijos en $x - x_0$, es decír, si $a_1(x)$ y $a_2(x)$ pueden ser expandidos en serie de potencias en un intervalo incluyendo $x - x_0$. De lo contrario, el punto $a_1(x)$ y $a_2(x)$ es expresado para ser un *punto singular de la ecuación diferencial.* En tal caso, si los productos $(x - x_0)a_1(x)$ y $(x - x_0)^2a_2(x)$ son ambos fijos en $x - x_0$, el punto $x - x_0$ es expresado para ser *un punto singular fijo*; de lo contrario, el punto es llamado un *un punto singular no fijo.*

Como ejemplo, podemos notar que para la primera ecuación diferencial de la sección precedente, $a_1(x) = 0$ y $a_2(x) = -1$. De esta manera, todos los puntos son puntos ordinarios. En el segundo ejemplo los coeficientes $a_1(x) = 1 + x^{-1}$ y $a_2(x) = -x^{-2}$ no puede ser expandido en potencias de x, pero puede ser expandido en serie de potencias próximo a cualquier otro punto $x - x_0$. De esta manera el punto $x = 0$ es el único punto singular. Ya que los productos $xa_1(x) = x + 1$ y $x^2a_2(x) = -1$ son fijos en $x = 0$, sigue que el punto es un punto singular fijo. En el tercer caso el punto $x = 0$ es facilmente observable que es un punto singular no fijo. Similarmente, para la ecuación

$$x^2(1-x)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x^2(1-x)\frac{dy}{dx} + 3y = 0,$$

puede ser verificado que $x = 0$ es un punto singular no fijo y $x = 1$ es un punto singular fijo. Todos los demás puntos son ordinarios.

Cuando los coeficientes $a_1(x)$ y $a_2(x)$ en la forma estandar (1.28) son *relaciones de polinomios*, puntos singulares pueden ocurrir solo cuando un denominador es cero, así que, al menos de que el numerador también desaparesca, el coeficiente correspondiente no es *finito.* La mayoría de las ecuaciones consideradas en este texto serán de este tipo.

No obstante, un punto singular también podría ocurrir cuando $a_1(x)$ o $a_2(x)$ llegen a ser infinito en cualquier otra forma, o aún en la ausencia de tal comportamiento. Por ejemplo, si $a_1(x) = (x-1)^{5/3}$, se observa que $a_1^n(x)$ llega a ser infinito cuando $x \to 1$, así que $a_1(x)$ no puede ser expandida en serie de potencias de $x-1$. Ya que la función $(x-1)a_1(x) = (x-1)^{7/3}$ tampoco puede ser expandida, sigue que la ecuación diferencial (1.28) tiene, de hecho, un punto singular *no fijo* en $x = 1$ cuando $a_1(x) = (x-1)^{5/3}$.

Esto mostrará que, si $x = x_0$ es un punto *ordinario* de (1.28), entonces la ecuación posee dos soluciones linealmente independientes las cuales son fijas en $x = x_0$, y por lo tanto *ambas* son expresables en la forma $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x-x_0)^k$. Si $x = x_0$ es un punto singular fijo de (1.28), esto mostrará que la ecuación no necesariamente posee cualquier solución no trivial la cual es fija proxima a $x = x_0$, pero que al menos una solución existe de la forma

$$y = (x = x_0)^s \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x - x_0)^k.$$

donde s es un número determinable el cual podría ser real o imaginario. Tal solución es fija en $x = x_0$ solo si s cero o un entero positivo. Si $x = x_0$ es un punto singular fijo de (1.28), el problema es más complejo; una solución no trivial de este tipo podría o no podría existir.

Como ejemplo, la ecuación

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1 + 2x)\frac{dy}{dx} = 0$$

tiene un punto singular no fijo en $x = 0$. La solución general es

$$y = c_1 e^{1/x} + c_2;$$

por lo tanto la solución $y =$ constante es

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

también tiene un punto singular no fijo en $x = 0$ y tiene la solución general

$$y = c_1 \sin\frac{1}{x} + c_2 \cos\frac{1}{x};$$

Por consiguiente de la naturaleza de estas funciones que esta ecuación tampoco tiene una solución fija no trivial en $x = 0$ ni una solución expresable in la forma más general

$$y = x^s \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

1.5. El Método de Frobenius

En esta sección restrinjimos nuestra atención a las soluciones validas en la vecindad del punto $x = 0$. Soluciones validas aproximadas a un punto más general $x = x_0$ podría ser obtenido de una forma analoga, aunque para este proposito es frecuentemente más conveniente primero remplazar $x - x_0$ por una nueva variable t y entonces determinar soluciones de la ecuación diferencial transformada proxima al punto $t = 0$.

En vez de reducir una ecuación lineal de segundo orden a la forma estandar (1.28), es frecuntemente más conveniente usar una forma la cual es, para algunas expansiones, despejado de fracciones, particularmente si $a_1(x)$ o $a_2(x)$ es la relación de dos polinomios. Por esta razón, investigar la naturaleza de soluciones validas proximas a $x = 0$, supone que la ecuación ha sido puesta en la forma

{16}
$$Ly \equiv R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}P(x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}Q(x)y = 0, \tag{1.29}$$

donde $R(x)$ no desaparece en algun intervalo incluyendo a $x = 0$. Tambié suponemos que $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son fijos en $x = 0$. Entonces, con la notación de (1.28), los productos

$$xa_1(x) = \frac{P(x)}{R(x)} \qquad y \qquad x^2 a_2(x) = \frac{Q(x)}{R(x)}$$

son fijos en $x = 0$, y este punto tampoco es un punto ordinario o, en el peor de los casos, un punto singular fijo de la ecuación diferencial.

Es conveniente suponer también que la ecuación original haya sido dividida por una constante conveniente así que $R(0) = 1$. Entonces podremos escribir

$$\begin{aligned} P(x) &= P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots , \\ Q(x) &= Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 + \cdots , \\ R(x) &= R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \cdots , \end{aligned} \tag{1.30}$$ {17}

las series convergiendo en algún intervalo incluyendo $x = 0$.

Intentamos encontrar soluciones no triviales las cuales son de la forma de una serie de potencias en x multiplicada por una potencia de x,

$$y = x^s \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = A_0 x^s + A_1 x^{s+1} + A_2 x^{s+2} + \cdots , \tag{1.31}$$ {18}

donde s ha sido determinado. El número A_0 es ahora, por suposición, el coeficiente del *primer término* en la serie, y por lo tanto *no debe desaparecer*. Sustituyendo dentro del miembro del lado izquierdo de (1.29) entonces da

$$\begin{aligned} Ly \equiv (1 + R_1 x + R_2 x^2 + \cdots) \times [&s(s-1)A_0 x^{s-2} \\ &+(s+1)sA_1 x^{s-1} + (s+2)(s+1)A_2 x^s + \cdots] \end{aligned}$$

$$+(P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots) \times [sA_0 x^{s-2} + (s+1)A_1 x^{s-1} + (s+2)A_2 x^s + \cdots]$$

$$+(Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 + \cdots) \times [A_0 x^{s-2} + A_1 x^{s-1} + A_2 x^s + \cdots],$$

o, depués de multiplicar término por término y colectando los coeficientes de potencias sucesivas de x,

$$\begin{gathered} Ly \equiv [s\,(s-1) + P_0 s + Q_0]\, A_0 x^{s-2} + \{[(s+1)\,s \\ +P_0\,(s+1) + Q_0]\, A_1 + [R_1 s\,(s-1) + P_1 s + Q_1]\, A_0\}\, x^{s-1} \\ + \{[(s+2)\,(s+1) + P_0\,(s+2) + Q_0]\, A_2 + [R_1\,(s+1)\,s + P_1\,(s+1) \\ +Q_1]\, A_1 + [R_2 s\,(s-1) + P_2 s + Q_2]\, A_0\}\, x^s + \cdots . \end{gathered} \tag{1.32}$$ {19}

A fin de abreviar esta relación, a continuación definiremos las funciones

$$f(s) = s(s-1) + P_0 s + Q_0 = s^2 + (P_0 - 1)s + Q_0 \tag{1.33}$$ {20}

y

$$g_n(s) = R_n(s-n)(s-n-1) + P_n(s-n) + Q_n$$

$$g_n(s) = R_n(s-n)^2 + (P_n - R_n)(s-n) + Q_n. \tag{1.34}$$ {21}

Con esta notación, la Ecuación (1.32) entonces se transforma en

{22}
$$\begin{aligned} Ly \equiv\ & f(s)\, A_0 x^{s-2} + \left[f(s+1)\, A_1 + g_1(s+1)\, A_0\right] x^{s-1} \\ & + \left[f(s+2)\, A_2 + g_1(s+2)\, A_1 + g_2(s+2)\, A_0\right] x^s + \cdots \\ & + \left[f(s+2)\, A_k + \textstyle\sum_{n=1}^{k} g_n(s+k)\, A_{k-n}\right] x^{s+k-2} + \cdots . \end{aligned} \tag{1.35}$$

A fin de que (1.29) sea satisfecha in un intervalo incluyendo $x = 0$, esta expresión debe desaparecer *identicamente*, en el sentido que los coeficientes de todas las potencias de x en (1.35) debe desaparecer independientemente. La desaparición del coeficiente de la potensia más baja x^{x-2} da el requerimiento

{23}
$$f(s) = 0 \quad o \quad s^2 + (P_0 - 1)\, s + Q_0 = 0. \tag{1.36}$$

Esta ecuación determina dos valores de s (el cual podría no obstante ser igual) y es llamada la *ecuación indicial.* Los dos valores de s, los cuales especifica los exponentes de los términos principales de soluciones de series posibles de la forma (1.31), son llamados los *exponentes de la ecuación diferencial* en $x = 0$.

Para cada semejante valor de s, la desaparición del coeficiente de x^{s-1} en (1.35) da el requerimiento

$$f(s+1)\, A_1 = -g_1(s+1)\, A_0$$

y por lo tanto determina A_1 en términos de A_0 si $f(s+1) \neq 0$.Continuando, la desaparición del coeficiente de x^s en (1.35) determina a A_2 en términos de A_1 y A_0,

$$f(s+2)\, A_2 = -g_1(s+2)A_1 - g_2(s+2)A_0,$$

y por lo tanto en términos de A_0, si $f(s+2) \neq 0$.

En general, la desaparición del coeficiente de x^{s+k-2} el la Ecuación (1.35) da la *formula de recurrencia*

{24}
$$f(s+k)\, A_k = -\sum_{n=1}^{k} g_n(s+k)\, A_{k-n} \qquad (k \geqq 1) \tag{1.37}$$

el cual determina cada A_k en términos del procedimiento de A, y por lo tanto en términos de A_0, si por cada entero positivo k la cantidad $f(s+k)$ no es cero.

Así, si dos valores diferentes de s son determinados por (1.36), y si para cada valor semejante de s la cantidad $f(s+k)$ nunca es cero para cualquier entero positivo k, los coeficientes de dos series de la forma (1.31) son determinados y estas series son soluciones de (1.29) en sus intervalos de convergencia. En tales casos, si la solución obtenida con $s = s_1$ es denotada por $A_0 u_1(x)$ y que con $s = s_2$ por $A_0 u_2(x)$, entonces la solución *general* puede ser expresada en la forma $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$. A continuación investigaremos los *casos exceptionales.*

Sean entonces las raices de la Ecuación $s = s_1$ y $s = s_2$, donde

{25}
$$\begin{aligned} s_1 &= \tfrac{1-P_0}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(1-P_0\right)^2 - 4Q_0}, \\ s_2 &= \tfrac{1-P_0}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(1-P_0\right)^2 - 4Q_0}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

El primer caso excepcional es entonces el caso cuando los exponentes s_1 y s_2 son iguales,

$$\left(1-P_0\right)^2 - 4Q_0 = 0. \tag{1.39}$$ {26}

En este caso solo una solución de la forma (1.31) puede ser obtenida.

Ahora suponiendo que los dos exponentes son distintos. El segundo caso excepcional podría entonces aparecer si $f\left(s_1+k\right)$ o $f\left(s_2+k\right)$ desaparecen para un valor entero positivo de k, se dice que $k=K$, así que (1.37) no puede ser resuelta por el coeficiente A_k. Con la notación de (1.38), tenemos

$$f\left(s\right) = \left(s-s_1\right)\left(s-s_2\right)$$

y por lo tanto

$$f\left(s+k\right) = \left(s+k-s_1\right)\left(s+k-s_2\right),$$

donde el cual sigue

$$f\left(s_1+k\right) = k\left[k+\left(s_1-s_2\right)\right], \qquad f\left(s_2+k\right) = k\left[k-\left(s_1-s_2\right)\right]. \tag{1.40}$$ {27}

Si s_1 es imaginario y los coeficientes P_k, Q_k, y R_k son todos reales, entonces s_2 es el número complejo conjugado. Por lo tanto en este caso s_1-s_2 es imaginario y las expresiones en (1.40) no pueden desaparecer para ningún valor real de k excepto $k=0$. Después se supone que s_1 y s_2 son reales y distintos, y que $s_1>s_2$. Entonces, ya que $s_1-s_2>0$, sigue que $f\left(s_1+k\right)$ no pueden desaparecer para $k \geqq 1$ y que $f\left(s_2+k\right)$ puede desaparecer solo cuando $k=s_1-s_2$. Ya que k podría tomar solo números enteros positivos, *esta condicion es posible solo si s_1-s_2 es un entero positivo.* Si $s_1=s_2$, entonces $f\left(s_1+k\right)$ no puede desaparecer cuando $k \geqq 1$.

De esta forma observamos que *si los dos exponentes s_1 y s_2 no difieren para cero o para un entero positivo,dos soluciones diferentes de tipo* (1.31) *son obtenidas. Si los exponentes son iguales, es obtenida una solución semejante, mientras que si los exponentes difieren para un entero positivo, es obtenida una solución del tipo* (1.31) *correspondiente al exponente más grande.*

Es sabido (ver, por ejemplo, Referencia 6 del Capítulo 1) que *el intervalo de convergencia de cada serie así obtenida es al menos el intervalo más amplio, centrado en $x=0$, dentro del cual las expansiones de $xa_1\left(x\right)$ y $x^2a_2\left(x\right)$ en potencias de x ambos convergen*, con el entendimiento natural de que el punto $x=0$ este mismo debe ser excluido cuando el exponente (s_1 *o* s_2) es negativo y tiene una parte real negativa.

Cuando x es compleja, cada serie infinita converge a una solución en un circulo en el plano complejo, con centro en el origen y radio al menos la distancia a la singularidad más cercana de $a_1\left(x\right)$ o $a_2\left(x\right)$, y con el centro suprimido cuando es necesario. La solución entonces se dice que tiene un *polo* y el origen cuando el exponente asociado es un entero negativo, así como en los casos excepcionales (Sección 5) cuando la función *logx* es incluida (ver Capitulo 10).

Si $s_1 - s_2 = K$, cuando K es un entero positivo, entonces cuando $k = K$ la formula de recurrencia (1.37) se convierte en

{28}
$$(s - s_2)(s - s_2 + K) A_K = -\sum_{n=1}^{K} g_n (s + K) A_{K-n}. \tag{1.41}$$

De esta manera, como hemos observado, el miembro izquierdo desaparece cuando $s = s_2$, y la ecuación no puede ser satisfecha por cualquier valor de A_K al menos pasa que el miembro derecho también es cero, en este caso el coeficiente A_K es indeterminado, y por lo tanto arbitrario. Si esta condición existe, una solución del tipo (1.31) es entonces obtenida, *correspondiente al exponente menor* s_2, el cual contiene *dos constantes arbitrarias* A_0 y A_K, y por lo tanto es la *solución completa*. Así concluimos que, si los exponentes difieren por un entero positivo, solamente una solución puede ser obtenida por el exponente más pequeño o son obtenidas dos *soluciones independientes*.

En el último caso las dos soluciones así obtenidas entonces deben incluir la solución correspondiente al exponente más grande como el coeficiente de A_K. Es importante hacer notar que esta es la situación, por ejemplo, cuando $x = 0$ es un *punto ordinario*. Ya que en este caso uno tiene $P_0 = Q_0 = Q_1 = 0$, y por lo tanto $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, y $K = s_1 - s_2 = 1$. Así la Ecuación (1.41) se convierte en

$$\begin{aligned} s(s+1) A_1 &= -g_1 (s+1) A_0 \\ &= -\left[R_1 s^2 + (P_1 - R_1) s\right] A_0 \\ &= -s\left[R_1 s + (P_1 - R_1)\right] A_0 \end{aligned}$$

y cuando $s = s_2 = 0$ la formula de recurrencia es identicamente satisfecha, dejando a A_1 además de A_0 arbitrarios. Así, *cuando $x = 0$ es un punto ordinario, dos soluciones linealmente independientes son regulares en $x = 0$ son obtenidas.*

La precedente derivación detallada fue propuesta para el objetivo de investigar la *existencia* de soluciones de series del tipo asumido. Aunque las formulas obtenidas pueden ser usadas directamente por la determinación de los coeficientes, una vez que las funciones $f(s)$, $g_1(s)$, $g_2(s)$, $\ldots$ son identificadas, es usualmente preferible obtener la ecuación indicial y las formulas de recurrencia en práctica real para una sustitución directa de la serie asumida dentro de la ecuación diferencial, escribiendo en cualquier forma conveniente.

Para ilustrar la aplicación del tratamiento precedido, otra vez consideramos el segundo ejemplo, Ecuación (1.26), de la Sección 2. Así buscamos soluciones de la ecuación

$$Ly \equiv x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \left(x^2 + x\right) \frac{dy}{dx} - y = 0$$

de la forma

$$y = x^s \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+s}.$$

Por sustitución directa en la ecuación diferencial, sigue que

$$Ly \equiv \left(s^2 - 1\right) A_0 x^s + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[(s+k)^2 - 1\right] A_k + (s + k - 1) A_{k-1} \right\} x^{k+s}.$$

Por lo tanto la *ecuación indicial* es

$$s^2 - 1 = 0$$

y *la formula de recurrencia* es

$$\left[(s+k)^2 - 1\right] A_k + (s+k-1)\, A_{k-1} = 0$$

o

$$(s+k-1)\left[(s+k+1)\, A_k + A_{k-1}\right] = 0 \qquad (k \geqq 1)\,.$$

Los exponentes s_1 y s_2 son $+1$ y -1, respectivamente. Ya que difieren por un entero, una solució del tipo requerido es asegurada solo cuando s el valor más grande $+1$.

Con $s = +1$, la formula de recurrencia llega a ser

$$k\left[(k+2)\, A_k + A_{k-1}\right] = 0,$$

o, ya que $k \geqq 0$,

$$A_k = -\frac{A_{k-1}}{k+2} \qquad (k \geqq 1).$$

De esta manera uno tiene

$$A_1 = -\frac{A_0}{3}, \qquad A_2 = \frac{A_0}{3 \cdot 4}, \qquad = -\frac{A_0}{3 \cdot 4 \cdot 5}, \cdots$$

y por lo tanto la solución correspondiente a $s = 1$ es

$$\begin{aligned} y &= x\left(A_0 - \frac{A_0}{3}x + \frac{A_0}{3 \cdot 4}x^2 - \frac{A_0}{3 \cdot 4 \cdot 5}x^3 + \cdots\right) \\ &= A_0\left(x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} - \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots\right) \\ &= 2A_0\frac{e^{-x} - 1 + x}{x}, \end{aligned}$$

de conformidad con el resultado obtenido previamente.

Con $s = -1$, la formula de recurrencia llega a ser

$$t\,(k-2)\,(kA_k + A_{k-1}) = 0 \qquad (k \geqq 1).$$

Es importante hacer notar que el factor $k - 2$ no puede ser cancelado excepto en el entendimiento de que sea $k \geqq 2$. Esto es, cuando $k = 2$, *la forma correcta de recurrencia es* $0 = 0$. Si $k = 1$, sique que

$$A_1 = -A_0.$$

Si $k = 2$, la formula de recurrencia es identicamente satisfecha, así que A_2 es *arbitraria*. Si $k \geqq 3$, la formula de recurrencia puede ser escrita en la forma

$$A_k = -\frac{A_{k-1}}{k} \qquad (k \geqq 3).$$

Si tomamos $A_2 = 0$, entonces sigue que $A_3 = A_4 = \cdots = 0$, y la solución correspondiente a $s = -1$ simplemente se conviente en

$$y = x^{-1}(A_0 - A_0 x) = A_0 \frac{1-x}{x}.$$

La solución general de la ecuación dada es entonces una combinación lineal de las dos soluciones así obtenidas, por lo tanto puede ser tomada convenientemente en la forma

$$\begin{aligned} y &= c_1 x\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} - \cdots\right) + c_2 x^{-1}(1-x) \\ &= 2c_1 \frac{e^{-x} - 1 + x}{x} + c_2 \frac{1-x}{x}, \end{aligned}$$

o, alternativamente,

$$y = C_1 \frac{e^{-x}}{x} + C_2 \frac{1-x}{x},$$

donde $C_1 = 2c_1$, y $C_2 = c_2 - 2c_1$. La unica solución regular en $x = 0$ es la formalmente obtenida,

$$y = 2c \frac{e^{-x} - 1 + x}{x}.$$

Puede ser verificado que si A_2 es dejado arbitrariamente, la solución correspondiente al exponente -1 es la suma de A_0 veces los dos términos de la solución obtenida y A_2 veces la solución de series infinitas correspondiente al exponente $+1$.

Para el proposito de eficiencia computacional, *cuando s_1 y s_2 difieren por un entero positivo K*, esto usualmente es conveniente explorar primero la situación correspondiente al exponente *más pequeño*, puesto que entonces se una solución no trivial es obtenida con $s = s_2$ será permisible dejar ambos A_K y A_0 arbitrarios en esta solución, y así obtener la solución *general* sin necesidad de proceder a una determinación con $s = s_1$. Una comprometida equivocaci'on frecuente, la cual vicia esta posibilidad, consiste en dividir ambos miembros de la formula de recurrencia por $k - K$ y entonces colocar $k = K$ en el resultado (y por lo tanto dividiendo entre cero).

1.6. Tratamiento de Casos Excepcionales

Primero consideramos el caso de *exponentes iguales*, e intentar determinar una segunda solución la cual es independiente de la obtenida por el método de Frobenius. Aunque este resultado podría ser acompletado con el método de la secci'on 1.10, el método por ser dado es usualmente más fácilmente aplicado.

En vez de primero introducir el valor del repetido exponente s_1 dentro de la fórmula de recurrencia (1.37) y entonces determinando $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ directamente en terminos de A_0, suponemos que los coeficientes $A_1,\ A_2, \cdots,\ A_k, \cdots$ primero son expresados, por el uso de la fórmula de recurrencia, en términos de A_0 y s. Indicamos este factor escribiendo $A_1 = A_1(s), A_2(s), \cdots$, donde, de hecho, cada $A_k(s)$ será de la forma $A_0 c_k(s)$, con $c_k(s)$ una función especifica de s. Con estos valores de las $A's$, como funciones de s, una función y dependiendo de s además de que x es determinado y es denotado por $y(x, s)$;

$$y\left(x,s\right) = x^s \sum_{k=0}^{\infty} A_k\left(s\right) x_k. \tag{1.42}$$ {29}

La referencia a la Ecuación (1.35) muestra que la satisfacción de la fórmula de recurrencia, para $k \geqq 1$, causa la desapariciń de todos los términos in (1.35) excepto el primero, así sigue

$$Ly\left(x,s\right) = A_0 f\left(s\right) x^{s-2}, \tag{1.43}$$ {30}

o, ya que en este caso de un exponente repetido s_1 tenemos $f(s) = (s - s_1)^2$,

$$Ly\left(x,s\right) = A_0 \left(s - s_1\right)^2 x^{s-2}, \tag{1.44}$$ {31}

El factor del lado derecho de la Ecuación (1.44) desaparece cuando $s - s_1$ es de acuerdo con el factor conocido que (1.42) llega a ser una solución de (1.29), es decir $y_1(x)$, cuando $s - s_1$; esto es,

$$y_1(x) = y(x, s_1).$$

No obstante, ya que $s = s_1$ es un cero repetido del miembro del lado derecho de (1.44), tambien sigue que el resultado de la diferenciación de cualquier miembro de (1.44) con respecto a s (tomando a x constante),

$$\frac{\partial}{\partial s} Ly\left(x,s\right) = A_0 \left[2\left(s - s_1\right) + \left(s - s_1\right)^2 \log x\right] x^{s-2},$$

es cero cuando $s = s_1$. Pero, ya que el operador $\partial/\partial s$ y el operador lineal L son conmutativos, entonces también sigue que

$$\left[\frac{\partial}{\partial s} Ly\left(x,s\right)\right]_{s=s_1} = L\left[\frac{\partial y\left(x,s\right)}{\partial s}\right]_{s=s_1} = 0. \tag{1.45}$$ {32}

Por lo tanto una seguanda solución de (1.29), cuando $s_1 = s_2$, es de la forma

$$y_2(x) = \left[\frac{\partial y\left(x,s\right)}{\partial s}\right]_{s=s_1}. \tag{1.46}$$ {33}

El segundo caso excepcional es en el cual *los exponentes difieren por un entero positivo* K,

$$s_1 - s_2 = K \geqq 1,$$

pero, donde la fórmula de recurrencia no es identicamente satisfecha cuando $k = K$ y $s = s_1$, que es, cuando el miembro derecho de (1.41) no desaparece cuando $s = s_2$. En tal caso, la Ecuación (1.41) puede ser satisfecha solo si $A_0 = A_1 = \cdots A_{K-1} = 0$, y por lo tanto la

Ecuación (1.29) no posee una solución del tipo (1.31) comenzando con un termino de la forma $A_0 x^{s_2}$.

En este caso suponemos otra vez que la fórmula de recurrencia es satisfecha cuando $k \geqq 1$ para todos los valores de s, así que con cada A_k expresada como el producto de A_0 y una cierta función de s, de nuevo definimos una función $y(x,s)$ de la forma (1.42). En este caso, no obstante, esto es claro desde (1.41) y desde la naturaleza de la f'ormula de recurrencia (1.37) que las expresiones de los coeficientes $A_K(s), A_{K+1}(s), \ldots$ ahora todos tendrán un factor $s - s_2$ en un denominador, y por lo tanto no se aproximará a límites finitos como $s \to s_2$. Si consideramos el producto $(s-s_2)y(x,s)$, observamos que como $s \to s_2$ términos con coeficientes A_k para el cual $k < K$ desaparecerá y los términos restantes se aproximaran a limites finitos, de esta manera da origen a una infinita serie de potencias de x comenzando con un término involucrando $x^{s_2+K} = x^{s_1}$. De esta manera las series restrictivas deben ser proporcionales a las series para el cual $s = s_1$. En este caso, no obstante, ya que nuevamente la satistacción de la fórmula de recurrencia para $k \geqq 1$ provoca todos los términos de (1.35) excepto el primero a desaparecer, tenemos

{34} $$L\left\{(s-s_2)\,y\,(x,s)\right\} = A_0\,(s-s_2)^2\,(s-s_1)\,x^{s-2}. \tag{1.47}$$

Pero ya que el miembro derecho tiene un doble cero $s = s_2$, la derivada parcial de cualquier miembro debe desaparecer como $s \to s_2$, y, para un argumento similar a esa induciendo a (1.45), concluimos que

$$L\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[(s-s_2)\,y\,(x,s)\right]\right\}_{s=s_2} = 0$$

así que la función

{35} $$y_2\,(x) = \left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[(s-s_2)\,y\,(x,s)\right]\right\}_{s=s_2} \tag{1.48}$$

es una solución de (1.29), en adición a la solución $y_1\,(x) = [y\,(x,s)]_{s=s_1}$ correspondiendo al exponente más grande s_1.

De las Ecuaciones (1.42) y (1.46) continua que cuando $s_2 = s_1$ la segunda solución y_2 es expresable como

{36} $$y_2\,(x) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k\,(s_1)\,x^{k+s_1}\right]\log x + \sum_{k=0}^{\infty} A'_k\,(s_1)\,x^{k+s_1}, \tag{1.49}$$

y el coeficiente de $\log x$ es observado para ser $y_1\,(x)$. Además, cuando s_1 y s_2 difieren por un entero positivo, pero no hay una solución de series de Frobenius con $s = s_2$, las Ecuaciones (1.42) y (1.48) muestran que las solución faltante y_2 se expresa como

{37} $$\begin{aligned} y_2\,(x) &= \left[\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(s-s_2)\,A_k\,(s)\,x^{k+s}\right]_{s=s_2}\log x \\ &+ \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s-s_2)\,A_k\,(s)\right]\right\}_{s=s_2} x^{k+s_2}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

El coeficiente de $\log x$ es el $lim_{s\to s_2}\left[(s-s_2)\,y\,(x,s)\right]$, el cual ha sido observado para ser *proporcional* a $y_1\,(x)$.

Por consiguiente, *en todos los casos cuando la ecuación diferencial*, teniendo $x = 0$ punto singular regular con exponentes s_1 y s_2, *posee solo una solución*

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+s_1} \equiv A_0 u_1(x)$$

de la forma (1.31), *cualquier solución independiente es de la forma*

$$y_2(x) = C u_1(x) \log x + \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{k+s_2}, \qquad (1.51)$$ {38}

donde C es una constante. Así, en lugar de usar el resultado de la ecuación (1.46) o (1.48) en tales casos, una segunda solución podría ser obtenida directamente suponiendo una solución de esta última forma y determinando la relación necesaria entre los coeficientes B_k y una constante escogida arbitrariamente $C \neq 0$.

1.7. Ejemplos de Casos Excepcionales

Para mostrar el procedimiento desarrollado en la sección precedente, consideramos la ecuación

$$Ly \equiv x\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0. \qquad (1.52)$$ {39}

Con la notación

$$y(x,s) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(s)\, x^{k+s}, \qquad (1.53)$$ {40}

por consiguiente

$$Ly(x,s) \equiv s(s-1)A_0 x^{s-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+s)(k+s-1)A_k - A_{k-1}\right] x^{k+s-1}.$$

Por lo tanto obtenemos la fórmula de recurrencia

$$(k+s)(k+s-1)A_k = A_{k-1} \qquad (k \geqq 1) \qquad (1.54)$$ {41}

y los dos indices

$$s_1 = 1, \qquad s_2 = 0. \qquad (1.55)$$ {42}

Ya que los indices difieren por unidad, una solución de la forma (1.53) es asegurado solo para $s = 1$.

De 1.54 sigue que

$$A_1 = \frac{A_0}{(s+1)s}, \qquad A_2 = \frac{A_0}{(s+2)(s+1)^2 s}, \qquad \cdots,$$

y en general, por razonamiento inductivo,

$$A_k\left(s\right)=\frac{A_0}{\left(s+k\right)\left[\left(s+k-1\right)\cdots\left(s+1\right)\right]^2s},\qquad\left(k\geqq 2\right).\tag{1.56}$$ {43}

La solución para el cual $s=s_1=1$ entonces llega a ser

{44} $$y_1\left(x\right)=A_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!k!}\equiv A_0u_1\left(x\right).\tag{1.57}$$

No obstante, ya que $A_k\left(s\right)\to\infty$ cuando $s\to 0$, para toda $k\geqq 1$, en efecto no hay solución de tipo (1.53) para la cual $s=0$.

A fin de obtener una segunda solución, podríamos referir a la Ecuación (1.50). El coeficiente de $\log x$ es visto como

{45} $$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[sA_k\left(s\right)\right]_{s=0}x^k&=A_0\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k-1)!k!}\\&=A_0\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!k!}=A_0u_1\left(x\right),\end{aligned}\tag{1.58}$$

cuando es tomada en cuenta la desaparición de $\left(sA_0\right)_{s=0}$. El coeficiente $d\left[sA_k\left(s\right)\right]/ds$, involucrado en la segunda serie de la Ecuación (1.50), es convenientemente evaluado por diferenciación logarítmica. Para este proposito, primero deducimos de (1.56) la relación

$$\log\left[sA_k\left(s\right)\right]=\log A_0-\log\left(s+k\right)-2\sum_{m=1}^{k-1}\log\left(s+m\right),$$

entonces diferenciar los miembros iguales y resolver el resultado en la forma

$$\frac{d}{ds}\left[sA_k\left(s\right)\right]=-\frac{\frac{1}{s+k}+2\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{s+m}}{\left(s+k\right)\left[\left(s+k-1\right)\cdots\left(s+1\right)\right]^2}A_0\qquad\left(k\geqq 2\right).$$

así por consiguiente

{46} $$\left\{\frac{d}{ds}\left[sA_k\left(s\right)\right]\right\}_{s=0}=-\frac{\varphi\left(k\right)+\varphi\left(k-1\right)}{k!\left(k-1\right)!}A_0\qquad\left(k\geqq 2\right),\tag{1.59}$$

con la abreviación

{47} $$\varphi(k)=\begin{cases}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k} & (k\geqq 2),\\ 0 & (k=0).\end{cases}\tag{1.60}$$

Es encontrado por calculo directo que la Ecuación (1.59) también toma para $k=1$, mientras el miembro del lado derecho debe ser remplazado por A_0 cuando $k=0$. Por lo tanto (1.50) da

{48} $$y_2(x)=A_0\left[u_1(x)\log x+1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(k\right)+\varphi\left(k-1\right)}{k!\left(k-1\right)!}x^k\right]\tag{1.61}$$

o, en la forma expandida,

$$y_2(x) = A_0 \left[(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \cdots) \log x + (1 - x - \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{18}x^3 - \cdots) \right].$$

El procedimiento alternativo descrito en el final de la sección precedente consiste de substituír la relación de la Ecuación (1.51) en la forma

$$y_2(x) = Cu_1(x) \log x + \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k \qquad (1.62) \quad \{49\}$$

directamente dentro de (1.52), para obtener la condición

$$\begin{aligned} &C \left[\left(x\tfrac{d^2u_1}{dx^2} - u_1 \right) \log x + 2\tfrac{du_1}{dx} - \tfrac{i}{x}u_1 \right] \\ &+ \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)kB_{k+1} - B_k]x^k = 0 \end{aligned} \qquad (1.63) \quad \{50\}$$

Ya que u_1 satisface la Ecuación (1.52), el coeficiente de $logx$ en (1.63) desaparece, y la introducción de (1.58) reduce a (1.63) a la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)kB_{k+1} - B_k]x^k + C \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{(k!)^2} - \frac{1}{(k+1)!k!} \right] x^k = 0.$$

El requerimiento de que el coeficiente de la potencia general x^k desaparece llegando a ser

$$(k+1)kB_{k+1} - B_k = -\frac{2k+1}{(k+1)!k!}C \qquad (k \geqq 0).$$

Arreglando k sucesivamente igual a $0, 1, 2, \ldots$, obtenemos

$$B_0 = C, \quad B_2 = \frac{1}{2}B_1 - \frac{3}{4}C, \quad B_3 = \frac{1}{12}B_1 - \frac{7}{36}C, \quad \ldots$$

Aquí ambos B_1 y C son arbitrarios y todos los otros coeficientes son expresados en términos de esas dos constantes, produciendo la solución (1.62) en la forma

$$\begin{aligned} y_2(x) = C &\left[(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \cdots) \log x + (1 - \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{7}{36}x^3 + \cdots) \right] \\ &+ B_1(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \cdots). \end{aligned} \qquad (1.64) \quad \{51\}$$

El coeficiente de B_1 es visto como $u_1(x)$. Así, si C y B_1 son dejadas como constantes arbitrarias, esta expresión para $y_2(x)$ de hecho representa la solución *general* de (1.52). La expresión particular para y_2 obtenida en (1.61), por el primer método, es obtenida de (1.64) escogiendo $C = -B_1 = A_0$.

Otra forma de encontrar la segunda solución es proponer una solución de la forma

$$y_2\,(x) = Cu_1\,(x) \log x + v\,(x) \qquad (1.65) \quad \{38\_2\}$$

que corresponde precisamente a la ec. (1.51). Sustituyendo esta forma de la segunda solución en la ecuación diferencial (1.52) tenemos que

$$x\frac{d^2y_2}{dx^2} - y_2 = Cx\frac{d^2u_1}{dx^2}\log x - Cu_1\log x + 2C\frac{du_1}{dx} - C\frac{u_1}{x} + x\frac{d^2v}{dx^2} - v = 0. \tag{1.66}$$

que nos deja una ecuación diferencial para $v\left(x\right)$

$$x\frac{d^2v}{dx^2} - v + 2C\frac{du_1}{dx} - C\frac{u_1}{x} = 0. \tag{1.67}$$ {39_2}

La solución de esta ecuación diferencial debe ser, de acuerdo con (1.51),

{39_3}
$$v\left(x\right) = \sum_0^\infty B_k x^{k+s_2} = \sum_0^\infty B_k x^k. \tag{1.68}$$

Sustituyendo la forma (1.68) en (1.67) obtenemos las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} C - B_0 &= 0 & (1.69)\\ \left(k+1\right)kB_{k+1} - B_k + C\frac{2k+1}{k!\left(k+1\right)!} &= 0. & (1.70) \end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que esta relación de recurrencia da lugar a la misma segunda solución de la ecuación (1.64).

Se puede seguir un procedimiento similar para el caso en el que $s_1 = s_2$.

Capítulo 2

Funciones Especiales de la Física

2.1. Funciones de Bessel

2.1.1. Función Generatriz

Aunque las funciones de Bessel son principalmente soluciones de ecuaciones diferenciales como veremos en la sección 2.2.1, es interesante desarrollarlas por medios completamente distintos, como el de la función generatriz.

Introducimos la función[3]

$$g(x,t) = \exp\left(x\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\right). \tag{2.1}$$

Expandiendo esta función en una serie de Laurent

$$\exp\left(x\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n \tag{2.2}$$

Expandiendo las exponenciales en sus series de Maclaurin obtenemos

$$\begin{aligned}
\exp\left(x\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\right) &= e^{xt/2}e^{-x/2t} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^s\frac{t^{-s}}{s!} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{r+s}\frac{t^{r-s}}{r!s!} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}\right\}t^n.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

En el último paso de esta ecuación hicimos el cambio de variable $n = r - s$ donde $-\infty < n < \infty$ y $0 \leq r < \infty$. De esta última ecuación podemos ver que

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \tag{2.4}$$

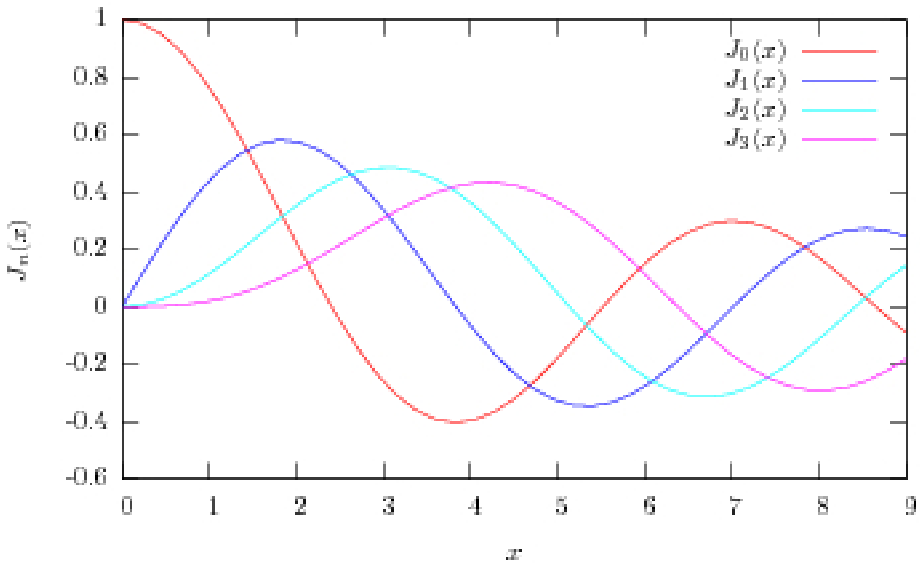

Figura 2.1: Funciones de Bessel. $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ y $J_3(x)$.

De esta expresión vemos que para n negativa

$$
\begin{aligned}
J_{-n}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(s-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(s-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \qquad , \qquad (s \to s+n) \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s!\,(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \\
&= (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} = (-1)^n J_n(x)
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

que es la primera identidad que tenemos para funciones de Bessel. En la Fig. **??** pueden verse graficadas algunas de las funciones de Bessel.

2.2. Una Clase Particular de Ecuaciones

Muchas ecuaciones importantes de segundo orden, de frecuente aparición en práctica, pueden ser obtenidas por especialización de la constante en la ecuación

{52}
$$
\left(1 + R_M x^M\right) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\left(P_0 + P_M x^M\right) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}\left(Q_0 + Q_M x^M\right) y = 0, \tag{2.6}
$$

donde M es un entero positivo. (En el caso cuando $M = 0$, la ecuación es equidimensional.) Aquí la introducción de la suposición

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+s} \tag{2.7}$$ {53}

conduce a la condición

$$\sum_{k=0}^{M-1} f(s+k)A_k x^{s+k-2} + \sum_{k=M}^{\infty} [f(s+k)A_k + g(s+k)A_{k-M}]x^{s+k-2} = 0,$$

donde

$$f(s) = s^2 + (P_0 - 1)s + Q_0$$

y

$$g(s) = g_M(s) = R_M(s-M)^2 + (P_M - R_M)(s-M) + Q_M.$$

Así, para cada exponente satisfaciendo la ecuación indicial $f(s) = 0$, la fórmula de recurrencia es

$$f(s+k)A_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, M-1),$$
$$f(s+k)A_k = -g(s+k)A_{k-M} \qquad (k \geqq M).$$

La primera condición $M - 1$ es satisfecha tomando

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_{M-1} = 0,$$

después de la cual la fórmula de recurrencia para $k \geqq M$ muestra que todos los coeficientes A_k para el cual k no es una integral multiple de M puede ser tomado como cero.

Y por lo tanto, es conveniente escribir

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{Mk+s} \tag{2.8}$$ {54}

cuando se busca una solución de un caso especial de la Ecuación (2.6). Aquí k ha sido reemplazado por Mk en (2.7) y B_k ha sido escrito para A_{Mk}.

Además, es visto que aquí puede ocurrir *un caso excepcional solo cuando los exponentes s_1 y s_2 son iguales o cuando $s_1 - s_2 = KM$, donde K es un entero positivo.* En tal situación, cuando solo una situación de tipo (2.8) es obtenida, una segunda solución puede ser encontrada, como de costumbre, usando las Ecuaciones (1.46) y (1.48).

Ya que la expansión de $(1 + R_M x^M)^{-1}$ converge cuando

$$|x| < |R_M|^{-1/M}, \tag{2.9}$$ {55}

la solución obtenida para (2.6) también convergerá en este intervalo. En particular, si $R_M = 0$, las series convergeran para todos los valores finitos de x (el valor $x = 0$ siendo aceptado por si mismo, como de costumbre, cuando la partición real de s es negativa).

Entre varias importantes especializaciones de la Ecuación (2.6), notamos la *ecuación de Bessel*,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0, \tag{2.10}$$ {56}

para el cual $M=2$; la *ecuación de Lagendre*,

{57} $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0, \tag{2.11}$$

para el cual $M=2$; y la *ecuación de Gauss*,

{58} $$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0, \tag{2.12}$$

para el cual $M=1$. La solución de estas ecuaciones, en la vecindad de $x=0$, son estudiadas en las siguientes secciones.

Otros casos especiales notables podrían ser listados como sigue.

1. La ecuación

{59} $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(c-x)\frac{dy}{dx}-ay=0, \tag{2.13}$$

para el cual $M=1$, es satisfecha para la *función hipergeométrica confluente* de Kummer, $y=M(a,c,x)$ (ver Problema 8). Si $c=1$ y $a=-n$ donde n es un entero positivo o cero, una solución es el *polinomio n-esimo de Laguerre*, $y=L_n(x)$. Si $c=m+1$ y $a=m-n$, donde m y n son enteros, una solución es el *polinomio de Laguerre asociado*,

$$y=L_n^m(x)=\frac{d^m}{dx^m}L_n(x),$$

si $m\leqq n$.

2. La ecuación

{60} $$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2ny=0, \tag{2.14}$$

para el cual $M=2$, es satisfecha por el *polinomio n-esimo de Hermite*, $y=H_n(x)$, cuando n es un entero positivo o cero.

3. La ecuación

{61} $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0, \tag{2.15}$$

para el cual $M=2$, es satisfecha por el *polinomio n-esimo de Chebyshev*, $y=T_n(x)$, cuando n es un entero positivo o cero.

4. La ecuación

{62}
$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[a-(1+b)x]\frac{dy}{dx}+n(b+n)y=0, \qquad (2.16)$$

para el cual $M=1$, es satisfecha por el *polinomio n-esimo de Jacobi*, $y=J_n(a,b,x)$, cuando n es un entero positivo o cero.

Las funciones mencionadas son útiles en muchas aplicaciones. Es un hecho curioso que todas ellas satisfacen ecuaciones las cuales son casos especiales de (2.6).

2.2.1. La solución General de la Ecuación Diferencial de Bessel {bess1}

Soluciones de la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0, \qquad (2.17)$$ {63}

o, equivalentemente,

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0,$$

son conocidas como *funciones de Bessel de orden p*. Estas ecuaciones son de uso frecuente en la solución de muchos tipos de problemas involucrando potenciales con fronteras circulares cilíndricas, además de otras aplicaciones, en tales campos como el eléctrico, fluidos, teoría de campo electrico, y análisis de movimiento aerodinámico. Suponemos que la constante p es real. Ya que solo la cantidad p^2 aparece en la ecuación (2.17), también podríamos considerar p siendo no negativo sin pérdida de generalidad.

Ya que la ecuación (2.17) es del tipo (2.7), con $M=2$, podríamos buscar una solución de la forma (2.8),

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^{2k+s}. \qquad (2.18)$$ {64}

Substituyendo dentro de (2.17) produciendo los indices

$$s_1=p, \qquad s_2=-p \qquad (2.19)$$ {65}

y la fórmula de recurrencia

$$(s+2k+p)(s+2k-p)B_k=-B_{k-1} \qquad (k\geqq 1). \qquad (2.20)$$ {66}

Los casos excepcionales podrían aparecer solo si $s_1-s_2=2p$ es cero o un entero multiple de $M=2$, esto es, si p es cero o un entero positivo. En tales casos podemos estar seguros solo de una solución de tipo (2.18).

En correspondencia con el exponente $s_1=p$, repitido el uso de la Ecuación (2.20) da

$$B_k(p)=(-1)^k\frac{1}{(2+2p)(4+2p)\cdots(2k+2p)}\frac{B_0}{2^kk!}$$

$$= (-1)^k \frac{1}{(1+p)(2+p)\cdots(k+p)} \frac{B_0}{2^{2k}k!} \qquad (k \geqq 1), \qquad (2.21)$$ {67}

así que una serie de tipo (2.18) es determinada, para $s = p$, en la forma

$$y_1(x) = B_0 \left[x^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{(1+p)(2+p)\cdots(k+p)2^{2k}k!} \right],$$

o, con el uso hecho de la Ecuación (2.6) del Capitulo 2,

$$y_1(x) = B_0 \Gamma(1+p) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k}k!\Gamma(k+p+1)}.$$

Este resultado es puesto dentro de una forma más compacta si usamos la abreviación $\Gamma(k+p+1) = (k+p)!$ y escribimos

{68} $$y_1(x) = 2^p p! B_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+p}}{k!(k+p)!} \equiv B_0 u_1(x). \qquad (2.22)$$

Las series multiplicando $2^p p! B_0$ en la Ecuación (2.22) es conocida como la *función de Bessel del primer tipo, de orden* p, y es denotada por $J_p(x)$,

{69} $$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+p}}{k!(k+p)!}. \qquad (2.23)$$

En particular, cuando $p = 0$ y 1, obtenemos las series en las formas

{70} $$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \cdots, \qquad (2.24)$$

{71} $$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 2!} + \frac{x^5}{2^5 2! 3!} - \frac{x^7}{2^7 3! 4!} + \cdots. \qquad (2.25)$$

Con $s = s_2 = -p$, la ecuación (2.20) produce el resultado de reemplazar p por $-p$ en (2.21),

{72} $$B_k(-p) = (-1)^k \frac{1}{(1-p)(2-p)\cdots(k-p)} \frac{B_0}{2^{2k}k!} \qquad (k \geqq 1). \qquad (2.26)$$

Así, si p es un entero positivo, todos los coeficientes B_k para el cual $k \geqq p$ llegan a ser infinitos, y no es obtenida una solución de Frobenius, en tal caso, correspondiendo al exponente $s = -p$. No obstante, si p no es cero o un entero positivo, una segunda solución es obtenida remplazando p por $-p$ en la primera solución, y por lo tanto podría ser tomado en la forma

{73} $$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-p}}{k!(k-p)!} \qquad (2.27)$$

Así, si p no es cero o un entero positivo, la solución completa de la Ecuación de Bessel (2.17) es una combinación lineal de las soluciones (2.23) y (2.27), de la forma

{74} $$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x). \tag{2.28}$$

Si $p = 0$, las dos soluciones son identicas. Además, si p es un entero positivo, la segunda solución $J_{-p}(x)$ no es independiente de $J_p(x)$. Esta relación es una consequencia del hecho que si p es un entero positivo n, el factor $1/(k-n)!$ en (2.27) es cero cuando $k < n$, y por lo tanto (2.27) es equivalente a

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-p}}{k!(k-n)!}$$

o, con el indice k remplazado por $k+n$,

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} (x/2)^{2k-p}}{k!(k+n)!}.$$

Por lo tanto, si n es un entero, obtenemos

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{2.29}$$ {75}

Podría notarse que, aunque los más altos coeficientes in las series $y_2(x)$ podrían llegar a ser infinito con $p \to n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) si el coeficiente B_0 fue tomado como fijo, hemos obtenido (2.27) por ajuste $B_0(-p)! = 1$ o $B_0 = 1/\Gamma(1-p)$ en esta serie y, ya que esta cantidad tiende a cero con $p \to n$, hemos obtenido una solución $J_{-p}(x)$ en la cual los coeficientes los cuales previamente llegaron a ser infinito con $p \to n$ ahora se aproximan a límites finitos, y los coeficientes restantes tienden a cero.

Para encontrar una segunda solución complementando $J_p(x)$ en los casos excepcionales, podríamos recurrir a los métodos de la Sección 4.5. Ilustramos el procedimiento in el caso de exponentes iguales, $p = 0$. En este caso obtenemos una función $y(x, s)$ determinando $B_k(s)$ de (2.20) e introduciendo el resultado dentro de (2.18). La segunda solución requerida es entonces

$$y_2(x) = \left[\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\right]_{s=0},$$

donde

$$y(x,s) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(s) x^{2k+s},$$

así que

$$y_2(x) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} B_k(0) x^{2k}\right] \log x + \sum_{k=1}^{\infty} B_k'(0) x^{2k}. \tag{2.30}$$ {76}

La fórmula de recurrencia (2.20) primero da

$$B_k(s) = (-1)^k \frac{B_0}{[(s+2)(s+4)\cdots(s+2k)]^2}.$$

Para calcular $B_k'(s)$ es otra vez conveniente primero tomar el logaritmo de las dos lados de la ecuación,

$$\log\left[(-1)^k\frac{B_k(s)}{B_0}\right] = -2\log\left[(s+2)(s+4)\cdots(s+2k)\right]$$
$$= -2\sum_{m=1}^{k}\log(s+2m).$$

Diferenciando con respecto a s entonces da

$$\frac{B_k'(s)}{B_k(s)} = -2\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{s+2m}$$

y por lo tanto

$$\frac{B_k'(0)}{B_k(0)} = -2\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m} = -\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}.$$

Así, si de nuevo introducimos la abreviación

{77} $$\varphi(k) = \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k} \qquad (k \geqq 1), \tag{2.31}$$

con

$$\varphi(0) = 0,$$

obtenemos

$$B_k'(0) = -\varphi(k)B_k(0) = -\varphi(k)\left[(-1)^k\frac{B_0}{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)]^2}\right]$$
$$= -\frac{(-1)^k\varphi(k)}{2^{2k}(k!)^2}B_0,$$

y (2.30) entonces da la segunda solución requerida en el caso $p=0$ en la forma

$$y_2(x) = B_0\left[J_0(x)\log x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\varphi(k)\frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}\right].$$

El coeficiente de B_0 es así una segunda solución de la ecuación de Bessel (2.17) cuando $p=0$,

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy = 0.$$

Esta fue tomada como la forma estandar de la segunda solución por *Neumann*, y es usualmente denotada por $Y^{(0)}(x)$. Así cualquier combinación lineal de $J_0(x)$ y $Y^{(0)}(x)$ es también una solución. La forma estandar escogida por *Weber* esta definida en terminos de J_0 y $Y^{(0)}$ por la ecuación

{78}
$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[Y^{(0)}(x) + (\gamma - \log 2)J_0(x)], \tag{2.32}$$

donde γ es *la constante de Euler*, definida por la relación

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{k\to\infty}[\varphi(k) - \log k] \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \log k\right) = 0{,}5772157\ldots.\end{aligned} \tag{2.33}$$
{79}

Así obtenemos una segunda solución en la forma

$$\begin{aligned}Y_0(x) &= \frac{2}{\pi}\left[\left(\log\frac{x}{2} + \gamma\right)J_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\varphi(k)\frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}\right] \\ &= \tfrac{2}{\pi}\left[\left(\log\tfrac{x}{2} + \gamma\right)J_0(x) + \left\{\tfrac{x^2}{2^2} - \tfrac{x^4}{2^4(2!)^2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \tfrac{x^6}{2^6(3!)^2}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) - \cdots\right\}\right].\end{aligned} \tag{2.34}$$
{80}

La función $Y_0(x)$ es conocida como *función de Bessel de segundo tipo, de orden cero* o de Weber de orden cero. En textos alemanes es frecuente denotar por $N_0(x)$. La solución completa puede ser escrita de la forma

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x). \tag{2.35}$$
{81}

La definición de Weber de la función de segundo tipo [Ecuación (2.32)] es más conveniente que la de Neumann porque del hecho que el comportamiento de la función $Y_0(x)$ así definido, *para valores grandes de* x, es más cercanamente comparable con el comportamiento de $J_0(x)$ [ver Ecuación (88)].

Un cálculo similar pero más fastidioso nos lleva a las expresiones para la forma de Weber de la *función de Bessel del segundo tipo, de orden* n,

$$\begin{aligned}Y_n(x) = \frac{2}{\pi}&\left[\left(\log\frac{x}{2} + \gamma\right)J_n(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}}{k!}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}[\varphi(k) + \varphi(k+n)]\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}\right]\end{aligned} \tag{2.36}$$
{82}

cuando n es un entero positivo. Así, en particular,

$$\begin{aligned}Y_1(x) = \frac{2}{\pi}&\left[\left(\log\frac{x}{2} + \gamma\right)J_1(x) - \frac{1}{x} - \frac{x}{4} + \left\{\frac{1 + (1 + \frac{1}{2})}{2}\right\}\frac{x^3}{2^3 2!}\right. \\ &\left. - \left\{\frac{(1 + \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{2}\right\}\frac{x^5}{2^5 2! 3!} + \cdots\right].\end{aligned} \tag{2.37}$$
{83}

Por consiguiente si $p = n$, donde n es cero o un entero positivo, la solución general de (2.17) puede ser tomada en la forma

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x). \tag{2.38}$$ {84}

Si p no es cero o un entero positivo, la función $Y_p(x)$ esta definida por la ecuación

{85} $$Y_p(x) = \frac{(\cos p\pi) J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}. \tag{2.39}$$

Esta definición puede ser mostrada para ser consistente con la Ecuación (2.36) como $p \to n$, y es definida $Y_p(x)$ como una combinación lineal de $J_p(x)$ y de otra manera $J_{-p}(x)$. Debería ser enfatizado, no obstante, que la segunda solución $Y_p(x)$ no es necesitada al menos que $p = n$.

La solución general de la Ecuación de Bessel es frecuentemente abreviada para el uso de la notación

{86} $$y = Z_p(x), \tag{2.40}$$

con la convención de que (2.40) permanesca para (2.28) al menos que p sea cero o un intero positivo, y para (2.38) en estos casos.

La transformación $y = u(x)/\sqrt{x}$ modifica 2.17) a la ecuación

{87} $$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) u = 0 \tag{2.41}$$

(ver el Problema 47 del Capítulo 1). Para valores grandes de x el término $(p^2 - \frac{1}{4})/x$ es despreciable en comparación con la unidad. Así podría ser esperedo que para valores grandes de x el comportamiento de las soluciones de (2.41) serán similares a la de soluciones correspondientes de la ecuación

$$\frac{d^2v}{dx^2} + v = 0.$$

Ya que tales soluciones pueden ser escritas en la forma $v = A\cos(x - \varphi)$, donde A y φ son constantes, nos estamos acercando a la posibilidad de que para valores grandes de x cualquier solución de (2.17) se comporta como la función

$$\frac{v(x)}{\sqrt{x}} = \frac{A}{\sqrt{x}} \cos(x - \varphi),$$

para escoger debidamente valores de A y φ. Un primer análisis involucrado muestra que para la función $J_p(x)$ uno tiene

$$A_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad y \qquad \varphi_1 = (2p+1)\frac{\pi}{4},$$

mientras que para $Y_p(x)$ sigue

$$A_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad y \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1,$$

Así podríamos escribir

{88}
$$\left.\begin{array}{lcl} J_p(x) & \sim & \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\alpha_p\right) \\ Y_p(x) & \sim & \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\alpha_p\right) \end{array}\right\} \qquad (x\to\infty), \tag{2.42}$$

donde

$$\alpha_p = (2p+1)\frac{\pi}{4}. \tag{2.43}$$ {89}

La notación de (2.42) denota que la relación de las dos expresiones conectadas por el simbolo se aproximan a la unidad cuando $x \to \infty$. Decimos que $J_p(x)$ *se comporta asintóticamente como* $\sqrt{2/\pi x}\cos\left(x-\alpha_p\right)$.

Por consiguiente de (2.42) la función compleja $J_p(x) + iY_p(x)$ tiene el comportamiento asintótico

$$J_p(x) + iY_p(x) \quad \sim \quad \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-\alpha_p)} \qquad (x\to\infty), \tag{2.44}$$ {90}

mientras que la función conjugada compleja tiene el comportamiento

$$J_p(x) - iY_p(x) \quad \sim \quad \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i(x-\alpha_p)} \qquad (x\to\infty). \tag{2.45}$$ {91}

Estas funciones complejas son conocidas como *las funciones de Bessel del tercer tipo*, o, más generalmente, como *las funciones de Hankel del primer y segundo tipo*, respectivamente, y las abreviaciones

$$\begin{array}{c} H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iY_p(x), \\ H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iY_p(x) \end{array} \tag{2.46}$$ {92}

son convencionales. Las funciones de Hankel son particularmente utiles en el estudio de ciertos tipos de ondas propagandose (ver Sección 9.13).

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2+p^2)y = 0, \tag{2.47}$$ {93}

las cuales difieren de la ecuación de Bessel (2.17) solo por el signo de x^2 en el coeficiente de y, es transformado por la substitución $ix = t$ a la ecuación

$$t^2\frac{d^2y}{dx^2} + t\frac{dy}{dx} - (t^2+p^2)y = 0,$$

la cual esta en la forma de la ecuación de Bessel (2.17). Por lo tanto, la solución general es de la forma $y = Z_p(t)$, o, en terminos de la variable original x, la solución general de (2.47) es

$$y = Z_p(ix). \tag{2.48}$$ {94}

Esto es, si p no es cero o un entero positivo, la solución general es de la forma

$$y = c_1 J_p(ix) + c_2 J_{-p}(ix),$$

mientras que de otro modo podría ser tomada en la forma

$$y = c_1 J_n(ix) + c_2 Y_n(ix).$$

De la ecuación (2.23) tenemos

$$J_p(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k+p} (x/2)^{2k+p}}{k!(k+p)!} = i^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+p}}{k!(k+p)!}$$

En lugar de usar esta función como una solución fundamental de (2.47), es preferible usar la función $I_p(x) = i^{-p} J_p(ix)$,

{95} $$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+p}}{k!(k+p)!}, \tag{2.49}$$

ya que esta función es real para valores reales de p. Esta función es conocida como el *la función de Bessel modificada del primer tipo, de orden p*. Los términos en la serie representando $I_p(x)$ difiere de esas en la serie para $J_p(x)$ solo en esta todos los términos son positivos en la serie I_p, mientras que alternan en signo en la serie J_p. Así, si p no es cero o un entero positivo, la solución general de (2.47) puede ser tomada en la forma real

{96} $$y = Z_p(ix) = c_1 I_p(x) + c_2 I_{-p}(x). \tag{2.50}$$

Como una segunda solución fundamental real de (2.47), en el caso cuando $p = n$, donde n es cero o un entero positivo, es más convencional definir la función $K_n(x)$ por la ecuación

{97} $$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(ix) + iY_n(ix)] = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix), \tag{2.51}$$

ejemplificando a la solución general

{98} $$y = Z_n(ix) = c_1 I_n(x) + c_2 K_n(x), \tag{2.52}$$

cuando n es cero o un entero positivo. La función $K_n(x)$ es conocida como la *función de Bessel modificada del segundo tipo, de orden n*.

Si p no es cero o un entero positivo, la función $K_p(x)$ esta definida por la ecuación

{99} $$K_p(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin p\pi}, \tag{2.53}$$

la cual es consistente con (2.51) cuando $p \to n$.

Para valores grandes de x las funciones modificadas tienen el comportamiento asintótico

{100} $$\left.\begin{array}{lcl} I_p(x) & \sim & \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \\ K_p(x) & \sim & \frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{2}{\pi} x}} \end{array}\right\} \qquad (x \to \infty). \tag{2.54}$$

Es importante notificar que los miembros derechos de (2.54) son independientes de p.

2.2.2. Propiedades de las Funciones de Bessel

Es facilmente verificado directamente que todas *las series de potencias* involucradas en las definiciones de todas las funciones de Bessel convergen para todos los valores finitos de x. No obstante, en consecuencia del hecho de que estas series son en muchos casos multiplicadas por una potencia negativa de x o por un término logarítmico, se encuentra que *solo las funciones* $J_p(x)$ *y* $I_p(x)$ *son finitas en* $x = 0$ (cuando $p \geqq 0$).

Para *valores pequeños de* x, conservación de los primeros términos en la serie respectiva conducen a las aproximaciones

$$J_p(x) \sim \frac{1}{2^p p!} x^p, \qquad J_{-p}(x) \sim \frac{2^p}{(-p)!} x^{-p} \qquad (p \neq n), \tag{2.55}$$ {101}

$$Y_p(x) \sim -\frac{2^p (p-1)}{\pi} x^{-p}, \qquad (p \neq 0), \qquad Y_0(x) \sim \frac{2}{(\pi)!} \log x, \tag{2.56}$$ {102}

$$I_p(x) \sim \frac{1}{2^p p!} x^p, \qquad I_{-p}(x) \sim \frac{2^p}{(-p)!} x^{-p} \qquad (p \neq n), \tag{2.57}$$ {103}

$$K_p(x) \sim 2^{p-1}(p-1)! x^{-p}, \qquad (p \neq 0), \qquad K_0(x) \sim -\log x, \tag{2.58}$$ {104}

otra vez con la implicación usual de que la relación de dos cantidades conectadas por el simbolo $\sim$

Para valores grandes de $x (x \to \infty)$, recapitulamos los resultados listados en la sección precedente:

$$J_p(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right), \quad Y_p(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right), \tag{2.59}$$ {105}

$$H_p^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i[x-(\pi/4)-(p\pi/2)]}, \quad H_p^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i[x-(\pi/4)-(p\pi/2)]}, \tag{2.60}$$ {106}

$$I_p(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad K_p(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x} e^{-x}}. \tag{2.61}$$ {107}

Las siguientes formulas derivadas son de uso frecuente:

$$\frac{d}{dx}[x^p y_p(\alpha x)] = \begin{cases} \alpha x^p y_{p-1}(\alpha x) & (y = J, Y, I, H^{(1)}, H^{(2)}), \\ -\alpha x^p y_{p-1}(\alpha x) & (y = K); \end{cases} \tag{2.62}$$ {108}

$$\frac{d}{dx}[x^{-p} y_p(\alpha x)] = \begin{cases} -\alpha x^{-p} y_{p+1}(\alpha x) & (y = J, Y, K, H^{(1)}, H^{(2)}), \\ \alpha x^{-p} y_{p+1}(\alpha x) & (y = I). \end{cases} \tag{2.63}$$ {109}

Estas fórmulas son establecidas por J_p y Y_p considerando sus series de definiciones, y para las funciones restantes considerando sus definiciones en terminos de J_p y Y_p. Así, probar (2.62) para J_p, notamos que de la definición (2.23) tenemos

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(\alpha x)] = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k+p} x^{2k+2p}}{2^{2k+p} k!(k+p)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k+p} x^{2k+2p-1}}{2^{2k+p-1} k!(k+p-1)!}$$

$$= \alpha x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha x/2)^{2k+p-1}}{k!(k+p-1)!}$$

$$= \alpha x^p J_{p-1}(\alpha x).$$

De (2.62) sigue que

{110}
$$\frac{d}{dx} y_p(\alpha x) = \begin{cases} \alpha y_{p-1}(\alpha x) - \frac{p}{x} y_p(\alpha x) & (y = J, Y, I, H^{(1)}, H^{(2)}), \\ -\alpha y_{p-1}(\alpha x) - \frac{p}{x} y_p(\alpha x) & (y = K); \end{cases} \tag{2.64}$$

mientras que (2.63) da

{111}
$$\frac{d}{dx} y_p(\alpha x) = \begin{cases} -\alpha y_{p+1}(\alpha x) + \frac{p}{x} y_p(\alpha x) & (y = J, Y, K, H^{(1)}, H^{(2)}), \\ \alpha y_{p+1}(\alpha x) - \frac{p}{x} y_p(\alpha x) & (y = I); \end{cases} \tag{2.65}$$

Por adición y substracción de (2.64) y (2.65) también obtenemos las relaciones

{112}
$$2\frac{d}{dx} y_p(\alpha x) = \alpha[y_{p-1}(\alpha x) - y_{p+1}(\alpha x)] \qquad (y = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)}) \tag{2.66}$$

{113}
$$y_{p-1}(\alpha x) = \frac{2p}{\alpha x} y_p(\alpha x) - y_{p-1}(\alpha x) \qquad (y = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)}) \tag{2.67}$$

$$2\frac{d}{dx} I_p(\alpha x) = \alpha[I_{p-1}(\alpha x) + I_{p+1}(\alpha x)],$$

$$2\frac{d}{dx} K_p(\alpha x) = -\alpha[K_{p-1}(\alpha x) + K_{p+1}(\alpha x)],$$

$$I_{p-1}(\alpha x) = -\frac{2p}{\alpha x} I_p(\alpha x) + I_{p-1}(\alpha x),$$

$$K_{p+1}(\alpha x) = \frac{2p}{\alpha x} K_p(\alpha x) + K_{p-1}(\alpha x),$$

Las relaciones (108-112) son útiles en la evaluación de ciertas integrales y derivadas involucrando las funciones de Bessel. En particular, estableciendo $s = 0$ en (2.63), obtenemos las relaciones

{114}
$$\frac{d}{dx} y_0(\alpha x) = \begin{cases} -\alpha y_1(\alpha x) & (y = J, Y, K, H^{(1)}, H^{(2)}), \\ \alpha y_1(\alpha x) & (y = I). \end{cases} \tag{2.68}$$

La relación (2.67) es útil en expresar las funciones de Bessel en términos del las funciones correspondientes de orden menor.

Las funciones de Bessel de orden p, donde p es la mitad de un entero impar, puede ser expresado en forma muy proxima, en términos de funciones elementales. Para establecer este hecho, consideramos primero el caso $p = frac12$ y denota la solución general de (2.17) para $y = Z_{1/2}(x)$. Si escribimos

$$u(x) = \sqrt{x} Z_{1/2}(x),$$

La ecuación (2.41) muestra que la función $u(x)$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$$

y por lo tanto es de la forma $u = A\cos x + B\sin x$. Tomando

$$u = \sqrt{x} J_{1/2}(x),$$

también tenemos, de (2.62),

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{x} J_{-1/2}(x).$$

Por lo tanto, usando (2.55), encontramos que

$$u(0) = 0 \qquad u'(0) = \frac{2^{1/2}}{(-\frac{1}{2})!} = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

De esta manera debemos tener $A = 0$, $B = \sqrt{2/\pi}$, y por consiguiente

$$u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \qquad \frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x,$$

o, finalmente,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \tag{2.69}$$ {115}

de acuerdo con (2.42), el cual aquí llega a ser una *igualdad*. También, ya que $I_{1/2}(x) = i^{-1/2} J_{1/2}(ix)$ y $I_{-1/2}(x) = i^{1/2} J_{-1/2}(ix)$, tenemos

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh x, \qquad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh x. \tag{2.70}$$ {116}

De (2.67), con $\alpha = 1$ y $p = n - \frac{1}{2}$, obtenemos las formulas de recurrencia

$$J_{n+1/2}(x) = \frac{2n-1}{x} J_{n-1/2}(x) - J_{n-3/2}(x) \tag{2.71}$$ {117}

y

$$I_{n+1/2}(x) = -\frac{2n-1}{x} I_{n-1/2}(x) + I_{n-3/2}(x), \tag{2.72}$$ {118}

el cual permite la determinación de $J_{n+1/2}(x)$ y $I_{n+1/2}(x)$ para todos los valores enteros de n, en terminos de las funciones (2.69) y (2.70). Algunas de esas funciones estan listadas en la Tabla 2 del Capítulo 2.

Como es indicado por las aproximaciones asintóticas (2.59), las funciones $J_p(x)$ y $Y_p(x)$ son oscilatorias en escencia, la amplitud de oscilación alrededor de un valor cero tendiendo a decrecer con $\sqrt{2/\pi x}$ y la distancia entre ceros sucesivos de la función decreciendo con respecto a π. Puede ser mostrado que los ceros de $J_p(x)$ separa los ceros de $J_{p+1}(x)$; es decir, entre cualquier dos sucesivos ceros de $J_{p+1}(x)$ hay uno y solamente un cero de $J_p(x)$. (Ver Problema 36.) La misma aplicación a los ceros de las funciones del segundo tipo. Las funciones I_p y K_p no son oscilatorias. Se encuentra que la función anterios escencialmente incrementa exponencialmente con x, mientras que la segunda escencialmente decrementa exponencialmente. El esbozo de esas funciones son presentadas en la Figura 4.1.

2.2.3. Ecuaciones Diferenciales Satisfechas por las Funciones de Bessel

La solución de la ecuación diferencial

{119} $$X^2\frac{d^2Y}{dX^2}+X\frac{dY}{dX}+(X^2-p^2)Y=0 \tag{2.73}$$

puede ser escrita en la forma

{120} $$Y=Z_p(X) \tag{2.74}$$

Si hacemos las sustituciones

{121} $$Y=\frac{y}{g(x)},\qquad X=f(x) \tag{2.75}$$

y notamos que entonces

{122} $$\frac{d}{dX}=\frac{1}{f'(x)}\frac{d}{dx}, \tag{2.76}$$

La Ecuación (2.73) se conviente en

$$f^2\left\{\frac{1}{f'}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'}\frac{d}{dx}\,(fracyg)\right]\right\}+f\left[\frac{1}{f'}\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{g}\right)\right]+(f^2-p^2)\frac{y}{g}=0,$$

o

{123} $$f\frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{d}{dx}\,(fracyg)}{f'}\right]+\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{g}\right)+\frac{f'}{f}(f^2-p^2)\frac{y}{g}=0. \tag{2.77}$$

Las referencias (2.74) y (2.75) muestran que (2.77) es una ecuación diferencial satisfecha para

{124} $$y=g(x)Z_p[f(x)]. \tag{2.78}$$

En particular, si colocamos

{125}
$$g(x) = x^A e^{-Bx^r}, \qquad f(x) = Cx^s, \tag{2.79}$$

La Ecuación (2.77) puede ser reducida a la forma

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x[(1-2A) + 2rBx^r]\frac{dy}{dx} + [A^2 - p^2s^2 +$$

$$s^2C^2x^{2s} - rB(2A-r)x^r + r^2B^2x^{2r}]y = 0.$$

Esta ecuación es en cierto modo simplificada si escribimos

$$1 - 2A = a, \qquad rB = b, \qquad A^2 - p^2s^2 = c, \qquad s^2C^2 = d,$$

de las cuales sigue

$$A = \frac{1-a}{2}, \qquad B = \frac{b}{r}, \qquad C = \frac{\sqrt{d}}{s}, \qquad p = \frac{1}{s}\sqrt{A^2 - c}. \tag{2.80}$$
{126}

Con esta notación, la ecuación diferencial toma la forma

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x[a + 2bx^r]\frac{dy}{dx} + [c + dx^{2s} - b(1-a-r)x^r + b^2x^{2r}]y = 0, \tag{2.81}$$
{127}

y la solución de (2.81), obtenida intruduciendo (2.79) y (2.80) dentro de (2.78), es de la forma

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} e^{-\frac{bx^r}{r}} Z_p\left(\frac{\sqrt{d}}{s}x^s\right), \tag{2.82}$$
{128}

donde

$$p = \frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - c}. \tag{2.83}$$
{129}

Si $\sqrt{d}/s$ es real, es interpretada por (2.28) o (2.38), mientras que si $\sqrt{d}/s$ es imaginario, Z_p representadas por (2.28) o (2.38), la elección en cualquier caso dependiendo ______________________________.

Así, si es posible identificar una ecuación diferencial particular con (2.81), eligiendo adecuadamente las constantes en (2.81), la solución esta dada inmediatamente por (2.82) en términos de las funciones de Bessel de orden p, donde p esta dado por (2.83). Listamos ciertas formas útiles especiales con soluciones correspondientes obtenidas sin dificultad de la siguiente manera.

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - p^2)y = 0, \qquad y = Z_p(kx) \qquad (k \neq 0).$$

$$x^2y'' + xy' - (k^2x^2 + p^2)y = 0, \qquad y = Z_p(ikx) \qquad (k \neq 0).$$

$$x^2y'' + xy' - (\beta^2 + \alpha x^{2s})y = 0, \qquad y = Z_{\beta/s}\left(\tfrac{\sqrt{\alpha}}{s}x^s\right) \qquad (\alpha s \neq 0).$$

$$y'' + kx^m y = 0, \qquad y = \sqrt{x}Z_{\frac{1}{m+2}}\left(\tfrac{2\sqrt{k}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right) \qquad (mk \neq -2k). \qquad (2.84)$$ {130}

$$\tfrac{d}{dx}\left(x^n \tfrac{dy}{dx}\right) + kx^m y = 0, \qquad y = x^{\frac{1-n}{2}} Z_p\left(\tfrac{\sqrt{k}}{s}x^s\right)$$

donde

$$s = \tfrac{m-n}{2} + 1, \qquad p = \tfrac{1-n}{2s} \qquad (ks \neq 0).$$

Los casos restringidos en (2.84) son todos facilmente resolubles como ecuaciones equidimensionales (ver Sección 1.6).

2.3. Funciones Ber y Bei

En ciertos problemas es conveniente obtener una solución deseada cono una parte real y una imaginaria de una función compleja, en términos de la cual una formulación simplificada del problema es posible. En tales casos las ecuaciones diferenciales con coeficientes complejos podrían ocurrir. En particular, las ecuaciones son muy frecuentemente obtenidas y de las cuales son reducidas de la forma

{131} $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (p^2 + ix^2)y = 0, \qquad (2.85)$$

donde p es una constante real. Ya que (2.85) es equivalente a (2.84) si $k^2 = i$ o $k = i^{1/2}$, la solución de (2.85) puede ser expresada en la forma

{132} $$y = Z_p(i^{3/2}x). \qquad (2.86)$$

Las soluciones de (2.85) las cuales son finitas en $x = 0$ son por lo tanto multiplos de la función $J_p(i^{3/2}x)$. Esta función es una función compleja en las que sus partes real e imaginaria son escritas $ber_p x$ y $bei_p x$, respectivamente,

{133} $$ber_p x + ibei_p x = J_p(i^{3/2}x) = i^p I_p(i^{1/2}x). \qquad (2.87)$$

La *notación polar*

{134} $$ber_p x + ibei_p x = M_p(x)e^{i\theta_p(x)} \qquad (2.88)$$

es también usada.

Consideramos, como ejemplo, el caso $p = 0$. En este caso los subíndices cero son convencionalmente omitidos en la notación para las partes real e imaginaria,

{135} $$J_0(i^{3/2}x) = ber\ x + ibei\ x. \tag{2.89}$$

De la definición (2.23) obtenemos, con $p = 0$,

$$J_0(i^{3/2}x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m i^{3m}(x/2)^{2m}}{(m!)^2},$$

independientemente de la elección de las dos posibles interpretaciones de $i^{3/2}$. Ahora separamos esta serie en dos partes, en la primera de la cual m toma valores pares y en la segunda de la cual solo valores pares de m. Si reemplazamos m por $2k$ en la primera serie y m por $2k+1$ en la segunda, obtenemos

$$J_0(i^{3/2}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{6k}(x/2)^4 k}{[(2k)!]^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{6k+3}(x/2)^{4k+2}}{[(2k+1)!]^2}.$$

Notando que

$$i^{6k} = (-1)^{3k} = (-1)^k, \qquad i^{6k+3} = (-1)^k i^3 = (-1)^{k+1} i,$$

obteniendo finalmente

$$J_0(i^{3/2}x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^4 k}{[(2k)!]^2} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{4k+2}}{[(2k+1)!]^2}. \tag{2.90}$$ {136}

Una comparación de (2.89) y (2.90) da los resultados

$$\begin{aligned} ber\ x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{4k}}{[(2k)!]^2} \\ &= 1 - \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \cdots \end{aligned} \tag{2.91}$$ {137}

y

$$\begin{aligned} bei\ x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{4k+2}}{[(2k+1)!]^2} \\ &= \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{x^1 0}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2} - \cdots, \end{aligned} \tag{2.92}$$ {138}

Espansiones de series análogas definiendo la funciones $ber_p x$ y $bei_p x$ para valores de p son obtenidos por métodos similares.

Funciones similares del *segundo tipo*, los cuales *no son finitos* en $x = 0$, son definidos por la relación

$$ker_p x + ikei_p x = i^{-p} K_p(i^{1/2}x). \tag{2.93}$$ {139}

La solución general de (2.85) puede ser escrita en la forma

$$y = (c_1\ ber_p x + c_2\ ker_p x) + i(c_1\ bei_p x + c_2\ kei_p x). \tag{2.94}$$ {140}

Para ejemplificar la ocurrencia de las funciones de Bessel de orden cero en práctica, consideramos soluciones particulares de las *ecuaciones deferenciales parciales*

{141} $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{2.95}$$

y

{142} $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x} = \mu \frac{\partial U}{\partial t} \tag{2.96}$$

Se encuentra que en muchos problemas físicos en varios campos, una propiedad física U dependiendo de una sola distancia variable x medida de un eje de referencia de simetría, y en un tiempo variable t, debe satisfacer uno u otra de estas ecuaciones, las cantidades λ y μ involucrando conocidas constantes físicas independientes del tiempo y posición. Es frecuentemente importante determinar soluciones de la forma

$$f(x) = \sin \omega t + g(x) \cos \omega t,$$

donde ω es una constante. No obstante, en vez de proceder directamente a tal determinación, es más conveniente considerar la solución requerida como *la parte real o imaginaria* de una *solución compleja* de la forma

{143} $$U = y(x) e^{i\omega t} \tag{2.97}$$

donde $y(x)$ es una función compleja de la forma $y(x) = F(x) + iG(x)$.

La sustitución de (2.97) en (2.95) y cancelaciones subsecuentes del factor $e^{i\omega t}$ muestra que la función $y(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial

{144} $$x\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \lambda \omega^2 x y = 0. \tag{2.98}$$

Si $\lambda > 0$, la solución general de (2.98) está dada por (2.84) en la forma $y = Z_0(\sqrt{\lambda}\omega x)$, mientras que si $\lambda < 0$, la solución general es de la forma $y = Z_0(\sqrt{-\lambda}\omega x)$. En particular, si consideraciones físicas requieren la solución para ser finita cuando $x = 0$, las soluciones deben ser de la forma $CJ_0(\sqrt{\lambda}\omega x)$ cuando $\lambda > 0$ y $CI_0(\sqrt{-\lambda}\omega x)$ donde en cualquier caso C es una constante (la cual podría ser compleja).

De manera similar, la sustitución de (2.97) en (2.96) da la ecuación

{145} $$x\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - i\mu\omega x y = 0 \tag{2.99}$$

siendo satisfecha por la función de amplitud compleja $y(x)$. Si $\mu > 0$, la comparación $y(x)$. Si $\mu > 0$, la comparación de (2.99) y (2.85) muestra que la solución más general de (2.99) el cual es finito cuando $x = 0$ es de la forma

{146} $$y = CJ_0(i^{3/2}\sqrt{\mu\omega}x) = C(ber\sqrt{\mu\omega}x + i\ bei\sqrt{\mu\omega}x). \tag{2.100}$$

Si $\mu < 0$, la solución correspondiente es de la forma

$$y = CJ_0(i^{1/2}\sqrt{-\mu\omega}x)$$

o, equivalentemente,

$$y = C(ber\ \sqrt{-\mu\omega}x - i\ bei\sqrt{-\mu\omega}x), \qquad (2.101)$$ {147}

como podría ser vista tomando el conjugado complejo de los miembros iguales de (2.99).

Las tablas útiles de las funciones de Bessel son incluidas en *las Tablas de Funciones*, completadas por Jahnke, Emde, y Lösch (Referencia 8), la notacion $N_p(x)$ ha sido usada en vez de $Y_p(x)$. Además, las partes real e imaginaria de las funciones $J_0(i^{1/2}x)$, $H_0^{(1)}(i^{1/2}x)$, y $i^{1/2}J_1(i^{1/2}x)$, $i^{1/2}H_1^{(1)}(i^{1/2}x)$ son respectivamente tabulados. Las primeras dos funciones son soluciones independientes de la ecuación

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (p^2 - ix^2)y = 0 \qquad (2.102)$$ {148}

cuando $p = 0$, y las dos últimas funciones son soluciones cuando $p = 1$. Material suplementario, incluyendo tablas de ceros de $J_p(x)$, también son incluídas. Tablas resumidas de las funciones que aparecen en (2.94) son incluidas en *las Tablas de Dwight* (Referencia 3).

2.4. Funciones de Legendre

Soluciones de la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - p(p+1)y = 0 \qquad (2.103)$$ {149}

o, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + p(p+1)y = 0$$

son conocidas como *las ecuaciones de Legendre de orden p*, donde p es tomada como real y no negativa. Son de uso particular en la solución de problemas potenciales involucrando limites esféricos, cuando la simetría rotacional se presenta.

Podríamos notar que $x = 0$ es un punto *ordinario* de (2.103) así que uno puede tomar $y = \sum A_k x^k$, con el conocimiento de que ambos A_0 y A_1 serán arbitrarios. No obstante, ya que (2.103) también es del tipo (2.6), con $M = 2$, es un poco más conveniente usar el método de la Sección 4.7. Así la introducción de

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{2k+s} \qquad (2.104)$$ {150}

dentro de la Ecuación (2.103) produce facilmente los exponentes

$$s_1 = 1, \qquad s_2 = 0 \qquad (2.105)$$ {151}

(como fue anticipado) y la fórmula de recurrencia

$$(s+2k)(s+2k-1)B_k = -(p-s-2k+2)(p+s+2k-1)B_{k-1} \qquad (2.106)$$ {152}

Con $s=0$, esta formula produce el resultado

$$B_k(0) = (-1)^k \frac{[p(p-2)(p-4)\cdots(p-2k+2)]}{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)]}$$
$$\times \frac{[(p+1)(p+3)(p+5)\cdots(p+2k-1)]}{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)]} B_0,$$

o

{153} $$B_k(0) = \tfrac{(-1)^k B_0}{(2k)!}[p(p-2)\cdots(p-2k+2)] \times [(p+1)(p+3)(p+5)\cdots(p+2k-1)]. \qquad (2.107)$$

Similarmente, cuando $s=1$, la Ecuación (2.106) da

{154} $$B_k(1) = \tfrac{(-1)^k B_0}{(2k+1)!}[(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)] \times [(p+2)(p+4)\cdots(p+2k)]. \qquad (2.108)$$

Las soluciones correspondientes a los exponentes $s=0$ y $s=1$ entonces son de las formas respectivas

$$B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(0)x^{2k}, \qquad B_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(1)x^{2k+1}.$$

Los coeficientes de B_0 en estas expresiones son aquí denotadas por $u_p(x)$ y $v_p(x)$, respectivamente, así que escribimos

{155} $$u_p(x) = 1 - \tfrac{p(p+1)}{2!}x^2 + \tfrac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \tfrac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6 + \cdots . \qquad (2.109)$$

y

{156} $$v_p(x) = x - \tfrac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \tfrac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \tfrac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7 + \cdots . \qquad (2.110)$$

Se puede observar que, si p es un *entero par positivo* n (o cero) las series (2.109) acaba con el término involucrando a x^n, y por lo tanto es un polinomio de grado n. Similarmente, si p es un *entero impar positivo* n, las series (2.110) acaba con el término involucrando a x^n. De otra manera, las expresiones son series infinitas. El resultado de la Sección 4.4 muestra que las series convergen cuando $-1 < x < 1$; de otra manera diverge (al menos terminan), como puede ser verificado directamente.

Así la solución general de la Ecuación (2.103) podría ser expresado en la forma

$$y = c_1 u_p(x) + c_2 v_p(x)$$

cuando $-1 < x < 1$. No obstante, una terminología diferente es convencional, por razones que seran ahora explicadas.

Primero consideramos el caso cuando $p = n$, donde n es un entero positivo o cero. Estos son los casos que aparecen comunmente en practica. Cuando $p = n$, una de las soluciones (2.109) o (2.110) es un polinomio de grado n, mientras la otra es una serie infinita. Ese multiplo del polinomio de grado n el cual tiene el valor unitario cuando $x = 1$ es llamado el *el polinomio de Legendre de grado* n y esta denotado por $P_n(x)$.

Así tenemos, cuando n es par (a) e impar (b),

$$\begin{aligned} a)P_n(x) &= \tfrac{u_n(x)}{u_n(1)} \\ b)P_n(x) &= \tfrac{v_n(x)}{v_n(1)}. \end{aligned} \qquad (2.111) \quad \{157\}$$

Los primeros seis polinomios de Lagendre son

$$\begin{gathered} P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x), \qquad P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{gathered} \qquad (2.112) \quad \{158\}$$

Para las últimas referencias, es notado que las funciones $u_n(x)$, con n par, y $v_n(x)$, con n impar, pueden ser mostradas teniendo los siguientes valores para $x = 1$:

$$\begin{aligned} &u_0(1) = 1, \qquad u_n(1) = (-1)^{n/2} \tfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}, \qquad (n = 2, 4, 6, \dots), \\ &v_1(1) = 1, \qquad v_n(1) = (-1)^{(n-1)/2} \tfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n}, \qquad (n = 3, 5, 7, \dots). \end{aligned} \qquad (2.113) \quad \{159\}$$

Cusndo p es un entero par n, la solución $v_n(x)$ es en la forma de una serie infinita, mientras que si p es un entero impar n, la solución $u_n(x)$ es una serie infinita. Los multiplos apropiados de estas soluciones son llamados *funciones de Legendre del segundo tipo* y son denotadas por $Q_n(x)$. Es convencional tomar los factores multiplicativos de $(-1)^n u_n(1)$ y $(-1)^n v_n(1)$, respectivamente, induciendo a la definición

$$Q_n(x) = \begin{cases} -v_n(1) u_n(x) & (n \ impar), \\ \ \ u_n(1) v_n(x) & (n \ par), \end{cases} \qquad (2.114) \quad \{160\}$$

donde las constantes $u_n(1)$, n par, y $v_n(1)$, n impar, son definidas por (2.113). No obstante, ya que las series aparecen en (2.114) convergen solo cuando $|x| < 1$, las funciones $Q_n(x)$ son definidas por (2.114) solo dentro de este intervalo.

Así, cuando p es un entero n, un cierto multiplo de esa solución (2.109) o (2.110) el cual es un polinomio es escrito como $P_n(x)$, y un cierto multiplo de la otra (serie infinita) solución es escrita como $Q_n(x)$, así que la solución general de (2.103) en este caso es escrita en la forma

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x). \tag{2.115}$$ {161}

Se puede observar (ver Problema 64) que $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ ambos satisfacen *la fórmula de recurrencia*

{162} $$n y_n(x) = (2n-1)x y_{n-1}(x) - (n-1)y_{n-2}(x). \tag{2.116}$$

la Ecuación (2.116) permite la determinación de expresiones para funciones de Lagrange en terminos de funciones correspondientes de grado más bajo.

A continuación expresamos a $Q_0(x)$ y $Q_1(x)$ en forma compacta, usando los metodos de la Sección 1.10. Alusión al Problema 42 del Capítulo 1 muestra que las funciones $Q_n(x)$ son expresables en la forma

$$Q_n(x) = A_n P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2} + B_n P_n(x),$$

donde A_n y $B_n(x)$ son constantes escogidas convenientemente. En particular, ya que $P_0(x) = 1$, sigue que

$$Q_0(x) = A_0 \int \frac{dx}{1-x^2} + B_0,$$

o, si $|x| < 1$,

$$Q_0(x) = \frac{A_0}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + B_0.$$

De (2.114) obtenemos $Q_0(0) = u_0(1)v_0(0) = 0$ y $Q'_0(0) = u_0(1)v'_0(0) = 1$. Por lo tanto sigue que $A_0 = 1$, $B_0 = 0$, y tenemos el resultado

{163} $$Q_0(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \tanh^{-1} x \tag{2.117}$$

De igual forma, cuando $n = 1$, ya que $P_1(x) = x$ sigue que

$$Q_1(x) = A_1 x \int \frac{dx}{1-x^2} + B_1 x$$

o, si $|x| < 1$,

$$Q_1(x) = A_1 \left(\frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - 1 \right) + B_1 x.$$

De (2.114) tenemos

$$Q_1(0) = -v_1(1)u_1(0) = -1 \qquad y \qquad Q'_1(0) = -v_1(1)u'_1(0) = 0.$$

Por lo tanto debemos tomar a $A_1 = 1$ y $B_1 = 0$, y así obtener

{164} $$Q_1(x) = \frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - 1 = x Q_0(x) - 1. \tag{2.118}$$

Las expansiones de la serie $Q_0(x)$ y $Q_1(x)$, en potencias de x, son facilmente mostradas para estar de acuerdo con la serie indicada en (2.114).

El uso de la fórmula de recurrencia (2.116) ahora permite la determinación de $Q_n(x)$ para cualquier valor entero positivo de n. En este caso uno obtiene, en particular, las expresiones

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= P_2(x)Q_0(x) - \tfrac{3}{2}x, \\ Q_3(x) &= P_3(x)Q_0(x) - \tfrac{5}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}, \\ Q_4(x) &= P_4(x)Q_0(x) - \tfrac{35}{8}x^3 + \tfrac{55}{24}x, \\ Q_5(x) &= P_5(x)Q_0(x) - \tfrac{63}{8}x^4 + \tfrac{49}{8}x^2 - \tfrac{8}{15}. \end{aligned} \tag{2.119}$$ {165}

Para valores de x tal que $|x| > 1$, la integral $\int dx/(1-x^2)$ toma la forma

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} + C = \coth^{-1} x + C.$$

Así, si $|x| > 1$, la función

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \coth^{-1} x \tag{2.120}$$ {166}

es una solución de (2.103) la cual complementa la solución polinomial $P_0(x) = 1$. Soluciones correspondientes $Q_n(x)$ para valores integrales de n, *en el rango* $|x| > 1$, son obtenidos usando la notación de (2.120) [en lugar de (2.117)] en la Ecuación (2.118) y (2.119).

Si p no es un entero, una cierta combinación de las series (2.109) y (2.110) puede ser determinada a fin de que permanezca finito y tomando el valor unitario en $x = 1$ (ver Problema 65). Esta función es llamada $P_p(x)$, y una segunda combinación independiente es denotada por $Q_p(x)$, así que la solución general de (2.103) en el caso general es escrito en la forma

$$y = c_1 P_p(x) + c_2 Q_p(x). \tag{2.121}$$ {167}

La función $P_p(x)$ así definida, no obstante, tampoco permanecerá finita en el punto $x = -1$ a menos que p sea integral, y la función $Q_p(x)$ no pueda ser finita en $x = 1$. Por lo tanto *las únicas funciones de Lagendre las cuales son finitas en ambos* $x = 1$ *y* $x = -1$ *son los polinomios de Lagendre* $P_p(x)$, *para los cuales* p *es integral.* (Este factor sera de importancia en la Sección 5.14.)

La fórmula de Rodrigues, la cual expresa $P_p(x)$ en la forma alternativa

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \tag{2.122}$$ {168}

es particularmente útil tratando con ciertas integrales involucrando a los polinomios de Legendre. Probando que (2.122) es consistente con (2.111) para todos los valores positivos integrales de n es omitido aquí (ver Problema 60), pero es fácilmente verificado que (2.122) se reduce, en los casos especiales de (2.112), a las formas dadas.

De (2.122) se puede deducir que *todos los ceros de* $P_n(x)$ *son reales y no repetidos, y permanece en el intervalo* $-1 < x < 1$ (ver Problema 61). Otro factor importante (Problema

62) es que, en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$, la magnitud de cada polinomio de Legendre es máximo en los punto finales, así que

$$|P_n(x)| \leqq 1 \qquad cuando |x| \leqq 1,$$

Fuera del intervalo $(-1, 1)$, cada polinomio $P_n(x)$ incrementa o decrese regularmente, sin máximo o mínimo o puntos de inflexion (ver Figura 4.2).

Si $|x| < 1$, la substitución $x = \cos\varphi$ transforma la ecuación de Legendre de la forma (2.103) a la forma

{169} $$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\frac{dy}{d\varphi}\right) + n(n+1)y = 0 \tag{2.123}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + \frac{dy}{d\varphi}\cot\varphi + n(n+1)y = 0$$

cuando $p = n$, y por lo tanto (2.123) tiene la solución general

{170} $$y = c_1 P_n(\cos\varphi) + c_2 Q_n(\cos\varphi) \tag{2.124}$$

Ecuaciones de semejante forma frecuentemente presentes cuando las coordenadas esfericas son introducidas en la solución de un problema potencial con simetría rotacional. Notamos que $Q_n(\cos\varphi)$ no es finito cuando $\cos\varphi = \pm 1$, es decir, cuando $\varphi = k\pi$, mientras $P_n(\cos\varphi)$ es solamente un polinomio de grado n en $\cos\varphi$. En particular, tenemos las expresiones

$$P_0(\cos\varphi) = 1, \qquad P_1(\cos\varphi) = \cos\varphi,$$

{171} $$P_2(\cos\varphi) = \tfrac{1}{2}(3\cos^2\varphi - 1) = \tfrac{1}{4}(3\cos 2\varphi + 1), \tag{2.125}$$

$$P_3(\cos\varphi) = \tfrac{1}{2}(5\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) = \tfrac{1}{8}(5\cos 3\varphi + 3\cos\varphi).$$

Cuando $|x| < 1$, las funciones

{172} $$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \qquad Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m Q_n(x)}{dx^m} \tag{2.126}$$

son llamadas las *funciones asociadas de Lagendre de grado n y orden m, del primer y segundo tipo*, respectivamente. Podían ser mostradas para satisfacer la ecuación diferencial

{173} $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0, \tag{2.127}$$

la cual difiere de (2.103) solo en la presencia del término involucrando a m, y exactamente reducido a (2.103) cuando $m = 0$. Cuando $|x| > 1$, las definiciones (2.127) son modificadas reemplazando $1 - x^2$ por $x^2 - 1$.

Para cualquier valor integral no negativo de m, la ecuación (2.127) *posee una solución no trivial la cual es finita en ambos x=1 y x=2 solo cuando n es un entero, y esa solución es un múltiplo de* $P_n^m(x)$, con $n \geqq m$.

La substituci'on $x = \cos\varphi$ transforma a (2.127) en la ecuación

{174} $$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + \frac{dy}{d\varphi}\cot\varphi + [n(n+1) - m^2 \csc^2\varphi]y = 0, \tag{2.128}$$

la cual de esta manera es satisfecha por $P_n^m(cosvarphi)$ y $Q_n^m(cosvarphi)$. Estas funciones son comúnmente útiles en la solución de problemas potenciales involucrando límites esféricos, en la ausencia de simetría rotacional.

2.5. La Función Hipergeométrica

Las soluciones de la ecuación diferencial

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \tag{2.129}$$ {175}

son generalmente llamadas *funciones hipergeométricas*, ya que sus representaciones en series son, en un sentido, generalizaciones de la serie geométrica elemental. Ya que (2.129) es del tipo (2.6) con $M = 1$, la serie (2.9) se reduce a la forma usual

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{k+s}. \tag{2.130}$$ {176}

Los exponentes son encontrados

$$s = 0, 1-\gamma, \tag{2.131}$$ {177}

así que solo una solución de la forma asumida puede ser esperada cuando γ es integral. La fórmula de recurrencia es obtenida en la forma

$$(s+k)(s+k+\gamma-1)B_k = (s+k+\alpha-1)(s+k+\beta-1)B_{k-1} \qquad (k \geqq 1), \tag{2.132}$$ {178}

de la cual se sigue

$$\begin{aligned} B_k(s) = {} & \tfrac{[(s+\alpha)(s+\alpha+1)\cdots(s+\alpha+k-1)]}{[(s+1)(s+2)\cdots(s+k)]} \\ & \times \tfrac{[(s+\beta)(s+\beta+1)\cdots(s+\beta+k-1)]}{[(s+\gamma)(s+\gamma+1)\cdots(s+\gamma+k-1)]} B_0 \qquad (k \geqq 1). \end{aligned} \tag{2.133}$$ {179}

Correspondiente al exponente $s = 0$, de esta manera obtenemos la solución

$$y = \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)][\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)]}{[1\cdot 2\cdots k][\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)]} x^k \right\}. \tag{2.134}$$ {180}

El coeficiente de B_0 en (2.134) es escrito como $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$, y la serie es conocida como *la serie o función hipergeométrica*,

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots. \tag{2.135}$$ {181}

Se encuentra que la serie (2.135) converge en el intervalo $|x| < 1$ y también que, cuando $x = +1$, la serie converge solo si $\gamma - \alpha - \beta > 0$ y, cuando $x = -1$, la serie converge solo si $\gamma - \alpha - \beta + 1 > 0$.

Se debe hacer notar que si $\alpha = 1$ y $\beta = \gamma$, la serie se conviente en la serie geométrica elemental

{182} $$F(1, \beta; \beta; x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1). \tag{2.136}$$

También se puede observar que, a causa de la simetría en α y β, estos parametros son intercambiables,

{183} $$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\beta, \alpha; \gamma; x). \tag{2.137}$$

La solución (2.135) no existe (en general) cuando γ es cero o un entero negativo.

Correspondiente al exponente $s = 1 - \gamma$, obtenemos la solución

{184} $$\begin{aligned} y = B_0 x^{1-\gamma} = \Big\{ 1 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)\cdots(\alpha-\gamma+k)]}{[1\cdot 2\cdots k]} \\ \times \frac{[(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)\cdots(\beta-\gamma+k)]}{[(2-\gamma)(3-\gamma)\cdots(k+1-\gamma)]} x^k \Big\}. \end{aligned} \tag{2.138}$$

La serie entre corchetes en (2.138) se observa que difiere de (2.134) solo en que α, β, y γ en (2.134) son reemplazados por $(\alpha - \gamma + 1)$, $(\beta - \gamma + 1)$, y $(2 - \gamma)$, respectivamente, en (2.138). Por lo tanto (2.138) puede ser escrito en la forma

{185} $$y = B_0 x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; x). \tag{2.139}$$

La solución (2.139) no existe (en general) cuando α es un entero positivo más grande que la unidad. Cuando $\gamma = 1$, la solución (2.139) llega a ser identica con (2.135).

De esta manera, *si γ no es cero o un entero*, la solución general de (2.129) puede ser expresada en la forma

{186} $$y = c_1 F(\alpha, \beta; \gamma; x) + c_2 x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; x), \tag{2.140}$$

cuando $|x| < 1$. Los casos excepcionales pueden ser tratados por los métodos de la Sección 4.5.

Muchas funciones elementales son expresables en terminos de la función hipergeométrica (2.135), incluyendo los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned} (1-x)^{-\alpha} &= F(\alpha, \beta; \beta; x), \\ (1+x)^{-k} + (1-x)^{-k} &= 2F\left(\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right), \\ (1+\sqrt{1-x})^{-k} &= 2^{-k} F\left(\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}; k+1; x\right), \\ \log(1-x) &= xF(1, 1; 2; x), \\ \log\frac{1+x}{1-x} &= 2xF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; x^2\right). \end{aligned}$$

2.6. Solución en Series Validas para Valores Grandes de x

En la sección precedente habiamos considerado soluciones en series validas en un intervalo centrado en el punto $x = 0$, y habiamos notado que eran deseables soluciones validas cerca de un punto $x = x_0$, tales soluciones podrían ser convenientemente obtenidas por reemplazando primero a $x = x_0$ por una nueva variable independiente t y entonces buscando solucion en series de la forma

$$\sum A_n t^{n+s} = \sum A_n (x - x_0)^{n+s}$$

de la nueva ecuación. En tales casos, el punto $x = x_0$ naturalmente no debería ser peor que un punto singular regular.

De esta manera, si las soluciones en series de la ecuación de Bessel de orden cero en potencias de $x - 1$ fueron requeridas, podríamos establecer a $t = x - 1$ y así transformar esta ecuación a la forma

$$(1 + t)\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + (1 + t)y = 0.$$

Ya que el punto $t = 0$ es un *punto ordinario*, dos soluciones de la forma $\sum A_n t^n$ pueden ser obtenidas y reescritas finalmente en la forma deseada $\sum A_n (x - 1)^n$.

A fin de investigar el comportamiento de las soluciones para valores *grandes* de x, dirigiendonos a la posibilidad de reemplazar $1/x$ por una nueva variable independiente t, y entonces estudiando el comportamiento de las soluciones de la nueva ecuación para valores *pequeños* de t, ya que $t \to 0$ como $|x| \to \infty$. Si la nueva ecuación tiene el punto $t = 0$ como un *punto ordinario*, obtenemos dos soluciones de la forma $\sum A_n t^n = \sum A_n x^{-n}$, mientras que para un punto singular regular al menos una solución $\sum A_n t^{n+s} = \sum A_n x^{-n-s}$ es obtenida.

Con la substitución $x = 1/t$, la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dt} + a_2(x)y = 0 \qquad (2.141) \quad \{187\}$$

se conviente en

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t^2}\left[2t - a_1\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^4}a_2\left(\frac{1}{t}\right)y = 0. \qquad (2.142) \quad \{188\}$$

Si el punto $t = 0$ es un punto ordinario (o un punto singular) de (2.142), es convencional decir que "el punto $x = \infty$ es un punto ordinario (o un punto singular de (2.141))." El uso de tal frase es motivada por el hecho de que. si $t = 0$ es un punto ordinario (o un punto singular regular) de (2.142), entonces (2.141) posee soluciones de la forma $\sum A_n x^{-n}$ (o $\sum A_n x^{-n-s}$).

La ecuación (2.142) muestra que a fin de que $x = \infty$ sea un *punto ordinario* de (2.141) las funciones

$$\frac{1}{t^2}\left[2t - a_1\left(\frac{1}{t}\right)\right] \qquad y \qquad \frac{1}{t^4}a_2\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (2.143) \quad \{189\}$$

debe ser regular en $t = 0$, mientras a fin de que $x = \infty$ sea un *punto singular regular* de (2.141) las funciones

{190}
$$\frac{1}{t} a_1 \left(\frac{1}{t} \right) \qquad y \qquad \frac{1}{t^2} a_2 \left(\frac{1}{t} \right) \tag{2.144}$$

debe ser regular en $t = 0$.

Para ilustrar, notamos que, si a_1 y a_2 son *constantes* en (2.141), el punto $x = \infty$ es un *punto singular irregular* al menos $a_1 = a_2 = 0$, ya que las funciones a_1/t y a_2/t^2 no son regulares en $t = 0$.

La ecuación de Bessel (2.17) también tiene un punto singular *irregular* en $x = \infty$, ya que la función

$$\frac{1}{t^2} a_2 \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{1}{t^2} - p^2$$

no es regular en $t = 0$. De esta manera, la ecuación de Bessel tiene $x = 0$ como un punto singular regular y $x = \infty$ como un punto singular irregular. Todos los demás puntos son ordinarios.

La ecuación de Legendre (2.103), no obstante, tiene un punto singular *regular* en $x = \infty$, ya que

$$\frac{1}{t} a_1 \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{2}{1 - t^2} \qquad y \qquad \frac{1}{t^2} a_2 \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{p(p+1)}{t^2 - 1}$$

son regulares en $t = 0$, mientras que las funciones (2.143) no son regulares en $t = 0$. De esta manera se observa que la ecuación de Legendre tiene puntos singulares regulares en $x = \pm 1$ y en $x = \infty$ y puntos ordinarios en otra parte.

La expansión de $Q_n(x)$ en potencias inversas de x cuando $|x| > 1$ pueden ser expresadas en terminos de una serie hipergeométrica en la forma

$$Q_n(x) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{(n + \frac{1}{2})! (2x)^{n+1}} F \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; \frac{1}{x^2} \right).$$

Para la *ecuación hipergeométrica* (2.129) encontramos que $x = \infty$ es un *punto ordinario* solo si $\alpha = 0$, $\beta = 1$ o si $\alpha = 1$, $\beta = 0$, y es un *punto singular regular de otra manera*. De esta manera, excepto por los casos notados, la ecuación hipergeométrica tiene puntos singulares regulares en $x = 0$, $x = 1$, y $x = \infty$ y puntos ordinarios en otra parte. La solución general cuando $|x| > 1$ es de la forma

$$y = c_1 x^{-\alpha} F \left(\alpha, \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; \frac{1}{x} \right)$$
$$+ c_2 x^{-\beta} F \left(\beta, \beta - \gamma + 1; \beta - \alpha + 1; \frac{1}{x} \right),$$

previniendo que $\beta - \alpha$ no sea integral. (Ver Problema 76.)

Si, en la ecuación hipergeométrica (2.129), reemplazamos x por una nueva variable independiente x/β, obtenemos la ecuación

{191} $$x\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\gamma-x-(1+\alpha)\frac{x}{\beta}\right]\frac{dy}{dx}-\alpha y=0. \tag{2.145}$$

la cual tiene puntos singulares regulares en $x=0$, $x=\beta$, y $x=\alpha$, y cuya solución general, cuando $|x|<1$, esta dada por (2.140) con x reemplazado por x/β. Si ahora dejamos $\beta\to\infty$, la Ecuación (2.145) formalmente se conviente en

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0. \tag{2.146}$$ {192}

En la transición de (2.145) a (2.146), hemos movido el punto singular en $x=\beta$ en (2.145) dentro de la coincidencia o "confluencia" con el segundo punto singular en $x=\infty$. Por esta razón, (2.146) es conocido como la *ecuación hipergeométrica confluente*. Esta ecuación es un caso especial de (2.6), como fue señalado al final de la Sección 4.7, y es de alguna importancia en aplicaciones. Es de interes notar que $x=\infty$ es un punto singular irregular de (2.146), formado por la confluencia de dos puntos puntos singulares regulares originalmente distintos. (También ver Problema 14.)

En casos donde $x=\infty$ es un punto singular irregular, es frecuentemente posible obtener series del tipo

$$y(x)\ \sim\ e^{rx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k}{x^{k+s}}, \tag{2.147}$$ {193}

tal que substituciones formales de la serie dentro de la ecuación diferencial reduce la ecuación a una identidad. No obstante, la serie así obtenida generalmente *no converge para cualquier valor finito de x*. Todavía, ellos generalmente tienen la propiedad de que si un número finito, N, de terminos es retenido, la suma, $S_N(x)$, de estos términos aproxima a la solución $y(x)$ de tal manera que no solo la diferencia $y(x)-S_N(x)$ sino también el producto $x^N[y(x)-S_N(x)]$ se aproxima a cero como $|x|\to\infty$. Tales series, llamadas expanpansiones asintoticas de una solución $y(x)$, son de uso no solo en el estudio de la *naturaleza* de soluciones para valores grandes de $|x|$ pero también *calculando* valores de tales soluciones con predecible exactitud. La razón es que en *tales casos* el error asociado al calcular $y(x)$ usando N terminos es del orden de la magnitud del siguiente (abandonado) término, *proporcionando que el término sea numericamente mas pequeño que el último término conservado.* [Esto, por supuesto, no es una propiedad general de todas las series divergentes (o convergentes).] Aunque este error incremente eventualmente sin limite mientras que N incremente, los primeros términos sucecivos frecuentemente decrecen rapidamente en magnitud cuando x es grande, de modo que podría pararse en un término del orden de la magnitud del error tolerable.

Las aproximaciones asintóticas dadas en las ecuaciones (2.59-2.61) para las funciones de Bessel representan en cada caso el término principal de las expansiones asintóticas de este tipo, las cuales son listadas como sigue

$$J_p(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[U_p(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)-V_p(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)\right], \tag{2.148}$$ {194}

$$Y_p(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[U_p(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)-V_p(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)\right], \tag{2.149}$$ {195}

$$H_p^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}[U_p(x) + iV_p(x)]e^{i[x-(\pi/4)-(p\pi/2)]}, \quad (2.150)$$ {196}

{197} $$H_p^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}[U_p(x) - iV_p(x)]e^{-i[x-(\pi/4)-(p\pi/2)]}, \quad (2.151)$$

{198} $$I_p(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}W_p(x), \quad (2.152)$$

{199} $$K_p(x) \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}x}}W_p(-x), \quad (2.153)$$

donde U_p, V_p, y W_p denotan las respectivas series asintóticas

{200} $$\begin{gathered} U_p(x) = 1 - \tfrac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)}{2!(8x)^2} \\ + \tfrac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)(4p^2-5^2)(4p^2-7^2)}{4!(8x)^4} - \cdots, \end{gathered} \quad (2.154)$$

{201} $$V_p(x) = \frac{4p^2-1^2}{1!8x} - \frac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)(4p^2-5^2)}{3!(8x)^3} + \cdots, \quad (2.155)$$

{202} $$\begin{gathered} W_p(x) = U_p(ix) - iV_p(ix) \\ = 1 + \tfrac{4p^2-1^2}{1!8x} + \tfrac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)}{2!(8x)^2} - \cdots. \end{gathered} \quad (2.156)$$

Para ambos $U_p(x)$ y $V_p(x)$ es conocido (Referencia 17) que el error cometido cuando la expansión es terminada con el $k-esimo$ término no es más grande en magnitud que el valor absoluto del $(k+1)-esimo$ término, estipulando que $k > (2p-1)/4$. La misma declaración aplica a $W_p(x)$ si $k > (2p-1)/2$. Estas expansiones son frecuentemente usadas en la evaluación numérica de solución de problemas involucrando funciones de Bessel de argumento grande, cuando la precisión proporcionada por el término principal es insuficiente o sujeto a cuestion.

Las series asintóticas, como se definió, son en ocaciones también llamadas *series semi-convergentes*.

Capítulo 3

Ortogonalidad de las funciones especiales

3.1. El problema de Sturm-Liouville y ortonormalización de Gram-Schmidt

Supongamos que tenemos un operador diferencial de la forma

$$L = p_0\left(x\right)\frac{d^2}{dx^2} + p_1\left(x\right)\frac{d}{dx} + p_2\left(x\right) \tag{3.1}$$

{stu00}

donde $p_0\left(x\right) \neq 0$ para $x = 0$, que da lugar a la ecuación diferencial

$$Lu\left(x\right) = p_0\left(x\right)\frac{d^2}{dx^2}u\left(x\right) + p_1\left(x\right)\frac{d}{dx}u\left(x\right) + p_2\left(x\right)u\left(x\right) = 0 \tag{3.2}$$

definida en el intervalo $a \leq x \leq b$. El operador adjunto de L se define como

$$\overline{L} = \frac{d^2}{dx^2}\left[p_0\left(x\right)\cdot\right] - \frac{d}{dx}\left[p_1\left(x\right)\cdot\right] + p_2\left(x\right)\cdot \tag{3.3}$$

{stu01}

y actúa sobre la función $u\left(x\right)$ en la forma

$$\overline{L}u\left(x\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left[p_0\left(x\right)u\left(x\right)\right] - \frac{d}{dx}\left[p_1\left(x\right)u\left(x\right)\right] + p_2\left(x\right)\left[u\left(x\right)\right] \tag{3.4}$$

{stu02}

Si L es igual a su operador adjunto,

$$L = \overline{L}, \tag{3.5}$$

se dice que L es un operador adjunto. La Ec. (3.4) puede escribirse también como

$$\begin{aligned} \overline{L}u\left(x\right) \quad = \quad & p_0\left(x\right)\frac{d^2}{dx^2}\left[u\left(x\right)\right] + \left[2p_0'\left(x\right) - p_1\left(x\right)\right]\frac{d}{dx}\left[u\left(x\right)\right] \\ & + \left[p_0''\left(x\right) - p_1'\left(x\right) + p_2\left(x\right)\right]u\left(x\right), \end{aligned} \tag{3.6}$$

entonces, si L es autoadjunto deben cumplirse las siguientes igualdades

$$p_1(x) = 2p_0'(x) - p_1(x) \tag{3.7}$$
$$p_2(x) = p_0''(x) - p_1'(x) + p_2(x). \tag{3.8}$$

Estas dos igualdades se satisfacen si se cumple que

{stu05} $$p_1(x) = p_0'(x) = \frac{dp_0(x)}{dx}. \tag{3.9}$$

Además, de cumplirse esta igualdad, el operador L puede ponerse en la forma

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \overline{L}u(x) = p_0(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x) + p_0'(x)\frac{d}{dx}u(x) + p_2(x)u(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left[p_0(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + p_2(x)u(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + q(x)u(x). \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $p(x) = p_0(x)$ y $q(x) = p_2(x)$.

Cualquier operador puede convertirse en un operador autoadjunto si se multiplica por el factor

{stu04} $$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt\right]. \tag{3.11}$$

De esta manera,

{stu06} $$\tilde{L} = \mu(x)L \tag{3.12}$$

es un operador adjunto. Al multiplicar L por el factor $\mu(x)$ de la Ec. (**??**) obtenemos un operador de la forma

$$\tilde{L} = \tilde{p_0}(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{p_1}(x)\frac{d}{dx} + \tilde{p_2}(x) \tag{3.13}$$

donde

$$\tilde{p_0} = p_0(x)\mu(x) = \exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt\right] \tag{3.14}$$
$$\tilde{p_1} = p_1(x)\mu(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt\right] \tag{3.15}$$
$$\tilde{p_2} = p_2(x)\mu(x) = \frac{p_2(x)}{p_0(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt\right]. \tag{3.16}$$

De estas ecuaciones es fácil notar que la condición (3.9) se cumple para estas funciones

$$\tilde{p_1}(x) = \tilde{p_0}'(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt\right], \tag{3.17}$$

entonces, cualquier operador de la forma (3.12) es autoadjunto.

3.2. Ortogonalidad de las funciones de Bessel

La ecuación diferencial (2.17) puede ponerse en la forma[4]

{bessel41}

$$\rho\frac{d^2}{d\rho^2}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)+\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)+\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)=0 \tag{3.18}$$

donde hemos hecho el cambio de variable

$$x=\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a} \tag{3.19}$$

y $\alpha_{\nu m}$ es la m-ésima raiz de la función de Bessel $J_\nu\left(x\right)$ de tal manera que

$$J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\right)=0 \quad , \qquad m=0,1,2,\ldots \tag{3.20}$$

Para cualquier otra raiz, digamos n, tenemos que se cumple la ecuación de bessel (2.17)

$$\rho\frac{d^2}{d\rho^2}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)+\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)+\left(\frac{\alpha_{\nu n}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)=0. \tag{3.21}$$

{bessel42}

Las ecuaciones (3.18) y (3.21) pueden reescribirse como

$$\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]+\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) = 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right]+\left(\frac{\alpha_{\nu n}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) = 0 \tag{3.23}$$

Multiplicando (3.22) por $J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\rho/a\right)$ y (3.23) por $J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\rho/a\right)$ obtenemos que

$$J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]+\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) = 0 \tag{3.24}$$

$$J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right]+\left(\frac{\alpha_{\nu n}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) = 0 \tag{3.25}$$

Integrando el primer término de la Ec. (3.24) por partes se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]d\rho &= \left[J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]_0^a \\ &\quad -\int_0^a\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho \\ &= -\int_0^a\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\end{aligned} \tag{3.26}$$

ya que el factor ρ al igual que $J_\nu\left(\alpha_{\nu n} a/a\right) = 0$ permiten que el segundo término del primer renglón de la ecuación anterior se anulen. Analogamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right]d\rho &= \left[J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right]_0^a \\ &\quad -\int_0^a \rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)d\rho \\ &= -\int_0^a \rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)d\rho. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Finalmente, sustituyendo estos dos últimos resultados en las Ecs. (3.24) y (3.25) y sustrayendo la segunda de la primera obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_0^a \left[\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right. \\ -&\left.\left(\frac{\alpha_{\nu n}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)d\rho\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

entonces

$$\frac{\alpha_{\nu m}^2-\alpha_{\nu n}^2}{a^2}\int_0^a \rho J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho = 0. \tag{3.29}$$

De esta ecuación puede verse inmediatamente que

{bessel61}

$$\int_0^a \rho J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho \left\{\begin{array}{lcl} = 0 & , & \alpha_{\nu m}-\alpha_{\nu n}\neq 0 \\ \neq 0 & , & \alpha_{\nu m}-\alpha_{\nu n}=0. \end{array}\right. \tag{3.30}$$

Para conocer la normalización de las funciones de Bessel es importante calcular la integral

$$\int_0^a \rho\left[J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2 d\rho. \tag{3.31}$$

Multiplicando el lado izquierdo de la Ec. (3.18) por $2\rho dJ_\nu\left(\alpha_{\nu m}\rho/a\right)/d\rho$

$$\begin{aligned} &2\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right] \\ +&2\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) = 0, \end{aligned} \tag{3.32}$$

notamos que ambos términos pueden también escribirse como

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\rho}\left\{\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2\right\} \\ +&\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho^2}{a^2}-\nu^2\right)\left\{\left[\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2\right\} = 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Integrando toda la expresión anterior

$$\int_0^a \frac{d}{d\rho}\left\{\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2\right\}d\rho$$
$$+\int_0^a \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho^2}{a^2}-\nu^2\right)\left\{\left[\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2\right\}d\rho = 0. \tag{3.34}$$

El primer término se integra trivialmente como

$$\int_0^a \frac{d}{d\rho}\left\{\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2\right\}d\rho = \left\{\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2\right\}_0^a$$
$$= a^2\left[\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]_{\rho=a} = a^2\left[-\frac{\alpha_{\nu m}}{a}J_{\nu+1}\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)+\frac{\nu}{\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2_{\rho=a}$$
$$= \alpha_{\nu m}^2\left[J_{\nu+1}\left(\alpha_{\nu m}\right)\right]^2. \tag{3.35}$$

En el último rengón de las ecuaciones anteriores hemos utilizado las Ecs. (2.64) y (2.65). Integrando por partes el segundo término de la Ec. (3.34)

$$\int_0^a \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho^2}{a^2}-\nu^2\right)\left\{\left[\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2\right\}d\rho$$
$$= 2\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2}\int_0^a \left[J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2\rho d\rho$$
$$-\left[\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho^2}{a^2}-\nu^2\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]_0^a. \tag{3.36}$$

Si $\nu \geq 0$ entonces

$$\left[\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho^2}{a^2}-\nu^2\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]_0^a = \left(\alpha_{\nu m}^2-\nu^2\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\right)+\nu^2 J_\nu(0) = 0. \tag{3.37}$$

ya que $J_\nu(0) = 0$ si $\nu > 0$, $J_0(0) = 1$ pero para este caso $\nu = 0$ y por definición $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$. Sustituyendo las Ecs. (3.35), (3.36) y (3.37) en la Ec. (3.34)

$$2\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2}\int_0^a \left[J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2\rho d\rho = \alpha_{\nu m}^2\left[J_{\nu-1}\left(\alpha_{\nu m}\right)\right]^2 = \alpha_{\nu m}^2\left[J_{\nu+1}\left(\alpha_{\nu m}\right)\right]^2. \tag{3.38}$$

Combinando los resultados de la ecuación anterior y (3.30) otenemos las reglas de ortonormalización de la función de Bessel

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho = \begin{cases} 0 \quad , & \alpha_{\nu m}-\alpha_{\nu n}\neq 0 \\ \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(\alpha_{\nu m}\right)\right]^2 \quad , & \alpha_{\nu m}-\alpha_{\nu n} = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Bibliografía

[1] Francis B. Hildebrand. *Advanded Calculus for Applications*, chapter 2.9. Prentice-Hall, , New Jersey, 1976.

[2] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*, chapter 10.1. Academic Press, San Diego, 1985.

[3] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*, chapter 11.1. Academic Press, San Diego, 1985.

[4] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*, chapter 11.2. Academic Press, San Diego, 1985.