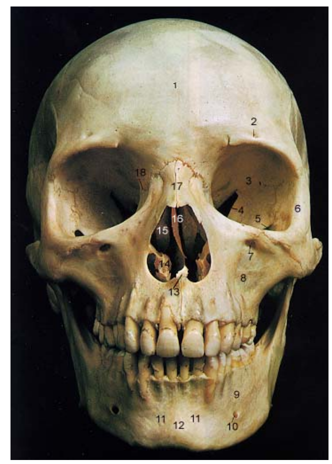
Unidad 1

Dinámica del Cuerpo Rígido



Auf dieser Welt der Erscheinung
ist weder wahrer Gewinn
noch wahrer Verlust moeglich

A. SCHOPPENHAUER

1.1 Cuerpos Rígidos

Definimos como **cuerpo rígido** a un sistema de muchas partículas cuyas distancias entre cualesquier dos de ellas permanecen constantes. Esto es, si la magnitud del vector $\vec{r}_{ij}$, que une a las partículas i y j para toda $i, j = 1, \cdots, N$, permanece constante como función del tiempo **DEF.**

$$|\vec{r}_{ij}| = constante, \tag{1.1}$$

Esto implica entre otras cosas que la fuerza neta interna $\vec{F}_{int}$ se anula y por tanto, el momento del centro de masas $\vec{p}_{CM}$ se conserva siempre que la fuerza neta externa sea nula.

Ach, daß ich durch diese seraphischen Seiten das Antlitz dessen nicht sehen kann, der mich liest! *Lautréamont/Maldoror*

En la definición anterior de cuerpo rígido, estamos suponiedo que se trata de objetos formados por partículas puntuales, la cual es una visión muy idealizada, aún en un modelo atomístico. En la práctica resulta más adecuado pensar que un cuerpo rígido es una *distribución contínua de masa*. Ahora es conveniente pensar, como es usual en el Cálculo Diferencial e Integral, que dichas distribuciones contínuas pueden imaginarse como constituidas por un sinfin de elementos diferenciales de volumen

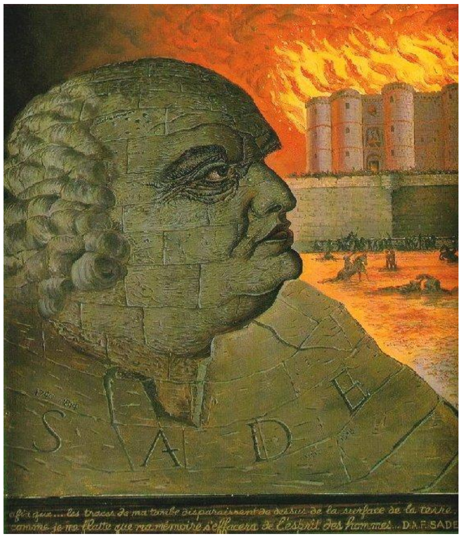
$$dV = dx\, dy\, dz, \tag{1.2}$$

con una cantidad diferencial de masa

$$dm = \rho(x, y, z)\, dV, \tag{1.3}$$

en donde $\rho(x, y, z)$ es la **densidad de masa** por unidad de volumen del material en el punto (x, y, z). Para que dicha distribución de masa corresponda a un cuerpo rígido es necesario adicionalmente que las distancias entre cualesquier dos elementos de volumen permanezcan constantes. El **volumen total** V y la **masa total** M estan dadas por

$$V = \int\limits_{solido} dV, \quad M = \int\limits_{solido} \rho(x, y, z)\, dV. \tag{1.4}$$



Ja, es ist stark, wie du uns inspirierst
in immer neuen,
Verwandlungen,
als weibliche Daemlichkeit und als
maennliche Idiotie,
wie du uns aus den blutunterlaufenen[2]
Augen des Schlaegers
leuchest . . . !

HANS MAGNUS ENZENSBERGER[a]

[a]El *Divino Marquéz* por Man Ray[1]. Versos de H. M. Enzensberger, "Kiosk", p. 25. Suhrkamp, 1997.

1.2 Dinámica Elemental del Cuerpo Rígido

El desplazamiento arbitrario de un cuerpo rígido está dado primero, por una traslación paralela del cuerpo en el cual el centro de masas se mueve hasta su posición final. Finalmente mediante una rotación alrededor del centro de masas se coloca al cuerpo con su orientación final. Para un punto cualquiera del cuerpo localizado en $\vec{r}$ y con una velocidad angular $\vec{\omega}$ *alrededor del centro de masas*, se sigue que su velocidad está dada por

$$\vec{v} = \vec{v}_{c.m.} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{1.5}$$

en donde $\vec{v}$ es la velocidad del punto en cuestión, $\vec{v}_{c.m.}$ la velocidad del centro de masas y el determinante

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \text{Det} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

El momento angular de un cuerpo rígido lo escribimos como

$$\vec{L} = \int_{Vol.} \vec{r} \times \vec{v}\, \rho\, dV = \int_{Vol.} \vec{r} \times \vec{v}_{c.m.} \rho\, dV + \int_{Vol.} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \rho\, dV. \tag{1.6}$$

Aquí reconocemos en el primer término al momento angular del centro de masas que escribiremos como $\vec{L}_{c.m.}$. Para el segundo y último término utilizamos la identidad

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \tag{1.7}$$

con $\vec{a} = \vec{c} = \vec{r}$ y $\vec{b} = \vec{\omega}$, para obtener

[2]Imagen tomada de: www.hrgiger.com.

$$\vec{L} = \vec{L}_{c.m.} + \int_{Vol.} \vec{\omega}\, r^2 \rho\, dV \; - \int_{Vol.} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r} \rho\, dV. \tag{1.8}$$

Notemos ahora que $\vec{\omega}$ es la misma para todos los puntos del cuerpo, ya que es la velocidad angular con respecto al centro de masas. Escribiendo además

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \hat{\imath}\omega_x x + \hat{\jmath}\omega_y y + \hat{z}\omega_z z,$$

y

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

llegamos a

$$(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r} = \hat{\imath}((x^2+y^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z) + \hat{\jmath}(-xy\omega_x + (x^2+z^2)\omega_y - yz\omega_z) + \hat{k}(-xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z).$$

Entonces

$$\vec{L} = \vec{L}_{c.m.} + \\ \hat{\imath}(I_{xx}\omega_x \; - \; \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{zx}) + \hat{\jmath}(I_{yy}\omega_y \; - \; \omega_x I_{xy} - \omega_z I_{yz}) + \hat{k}(I_{zz}\omega_z \; - \; \omega_x I_{xz} - \omega_y I_{yz}). \tag{1.9}$$

En donde hemos introducido a los **productos principales de inercia** (con respecto a los ejes x, y, z respectivamente) siguientes

$$I_{xx} = \int_{Vol} (y^2 + z^2)\rho\, dV,\; I_{yy} = \int_{Vol} (x^2 + z^2)\rho\, dV,\; I_{zz} = \int_{Vol} (x^2 + y^2)\rho\, dV. \tag{1.10}$$

Y además hemos definido a los **productos de inercia**

$$I_{xy} = -\int_{Vol} x\, y\, \rho\, dV,\; I_{yz} = -\int_{Vol} y\, z\, \rho\, dV,\; I_{zx} = -\int_{Vol} z\, x\, \rho\, dV. \tag{1.11}$$

Una manera simple de escribir al momento angular es

$$\vec{L} = \vec{L}_{c.m.} + \mathbf{I}\,\vec{\omega}, \tag{1.12}$$

con la velocidad angular $\vec{\omega}$ dada por un vector columna y la matriz de inercia $\mathbf{I}$ que es una matriz de tres por tres

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

1.3 Movimiento Laminar del Cuerpo Rígido

Un caso muy simple de movimiento de cuerpos rígidos es aquel para el cual todas las partículas se mueven paralelamente a un plano fijo. Llamamos **movimiento laminar del cuerpo**
DEF. **rígido** a dicho desplazamiento. Notemos que el eje de rotación puede cambiar de posición paralelamente, pero que no cambia su dirección.

1.3.1 Rotación alrededor de un Eje Fijo

Supongamos que el cuerpo rígido rota alrededor del eje z. Esto significa que todas las partículas del cuerpo describen círculos concéntricos en planos paralelos al plano $x-y$ y centrados en el eje z, como vimos en la unidad anterior en la sección (1.6) sobre coordenadas polares. En tal caso dedicimos que el vector de posición de una partícula situada en el plano $x-y$, está dado por

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r, \qquad \hat{e}_r = cos(\phi)\,\hat{i} + sen(\phi)\,\hat{j}, \tag{1.14}$$

con el vector unitario radial $\hat{e}_r$ ya que calculamos su módulo al cuadrado como $|\hat{e}_r|^2 = cos^2(\phi) + sen^2(\phi) = 1$. El vector de velocidad correspondiente es

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\omega\,\hat{e}_\phi, \tag{1.15}$$

con el vector tangencial unitario

$$\hat{e}_\phi = -sen(\phi)\,\hat{i} + cos(\phi)\,\hat{j},$$

ya que $|\hat{e}_\phi|^2 = sin^2(\phi) + cos^2(\phi) = 1$. Además este vector es perpendicular al vector $\hat{e}_r$ ya que $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi = -cos(\phi)sin(\phi) + sin(\phi)cos(\phi) = 0$.

Dado que estamos considerando que el cuerpo rígido rota alrededor del eje z fijo, y que definimos a la velocidad angular como aquel vector con módulo (con signo) $\omega = \dot{\phi}$ y con la dirección del eje de giro, tenemos que

$$\vec{\omega}(t) = \omega\,\hat{k}. \tag{1.16}$$

Notemos aquí que $\vec{\omega}$ no es necesariamente la velocidad angular con respecto al centro de masas como se supuso en la sección anterior. Finalmente la aceleración que está dada por

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r}\, -\, r\,\omega^2)\,\hat{e}_r + (2\omega\,\dot{r} + r\,\alpha)\,\hat{e}_\phi, \tag{1.17}$$

Ahora, si consideramos a cualquier partícula que no se encuentre en el plano $x-y$, las expresiones correspondientes para estos vectores son prácticamente las mismas, excepto que tenemos añadir a $\vec{r}$ la componente $z\hat{k}$, en donde z es la coordenada **constante** correspondiente en la dirección del eje z

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r + z\hat{k}. \tag{1.18}$$

Ahora bien, como todas las partículas del cuerpo se mueven sobre círculos de radios constantes a una altura constante z, entonces tendremos que $\dot{z} = 0$, $\dot{r} = 0$ y que $\ddot{r} = 0$. Con ello se reducen las relaciones anteriores a la velocidad

$$\vec{v}(t) = r\,\omega\,\hat{e}_\phi, \tag{1.19}$$

la cual no depende de la altura z: todas las particulas del sólido a la misma distancia del eje de giro se mueven a la misma velocidad. La aceleración está dada por

$$\vec{a}(t) = -r\,\omega^2\,\hat{e}_r + r\,\alpha\,\hat{e}_\phi, \tag{1.20}$$

en donde el primer término $-r\,\omega^2\,\hat{e}_r$ es la **aceleración centrípeta** (dirigida hacia el centro de la orbita circular) y el segundo término $r\,\alpha\,\hat{e}_\phi$, es la **aceleración transversal** (con dirección tangente a la órbita). Para la aceleración angular obtendremos que es el vector

$$\vec{\alpha}(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) = \alpha\,\hat{k}. \tag{1.21}$$

con $\alpha = \ddot{\phi}$. Consideremos ahora a los productos vectoriales siguientes

$$\hat{k}\times\hat{e}_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ cos(\phi) & sen(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \hat{e}_\phi, \quad \hat{k}\times\hat{e}_\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin(\phi) & cos(\phi) & 0 \end{vmatrix} = -\hat{e}_r. \tag{1.22}$$

Haciendo uso de estos productos en las expresiones últimas para la velocidad y la aceleración vemos que tendremos

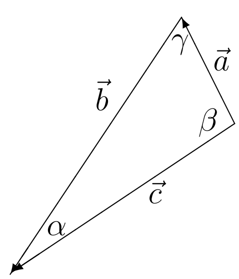
$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}\times\vec{r}, \quad \vec{a}(t) = \vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\alpha}\times\vec{r}. \tag{1.23}$$

Estas relaciones resumen de manera simple los resultados para el movimiento de *cada* partícula del sólido para rotaciones alrededor de un eje fijo. No incluyen nada adicional a lo ya contenido en las ec.(1.19) y ec.(1.20), pero pueden ser de utilidad en la consideración de problemas mas generales.

Para su uso posterior recordemos aquí a dos aplicaciones bien conocidas de los productos entre vectores son las identidades trigonométricas conocidas como *ley de los cosenos* y *ley de los senos*. Definamos

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{1.24}$$

en donde los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman un triángulo de ángulos interiores α, β y γ, opuestos a los lados $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente.



Entonces

$$c^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi-\gamma), \tag{1.25}$$

en donde $\pi-\gamma$ es el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Pero como $\cos(\pi-\gamma) = -\cos(\gamma)$, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma), \tag{1.26}$$

la cual es la conocida **ley de los cosenos**. **DEF.**

Si ahora multiplicamos a $\vec{c}$ vectorialmente por $\vec{a}$ y por $\vec{b}$, tendremos

$$|\vec{a}\times\vec{c}| = ac\,\mathrm{sen}(\beta) = |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\,\mathrm{sen}(\gamma) = |\vec{b}\times\vec{c}| = bc\,\mathrm{sen}(\alpha) = |\vec{b}\times\vec{a}|, \tag{1.27}$$

o bien, simplificando un poco

$$\frac{\mathrm{sen}(\beta)}{b} = \frac{\mathrm{sen}(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{a}, \tag{1.28}$$

la cual es la **ley de los senos**. **DEF.**

1.3.2 Momento Angular y Momentos de Inercia: Eje Fijo

Consideremos ahora al momento angular. Para una partícula de masa m describiendo una trayectoria circular de radio r paralela al plano $x - y$ y con coordenada vertical z, tendremos que $\vec{r} = r\hat{e}_r + z\,\hat{k}$ y

$$\vec{L} = mr^2\omega\,\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi + mrz\omega\,\hat{k}\times\hat{e}_\phi. \tag{1.29}$$

Pero podemos comprobar fácilmente que $\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi = \hat{k}$ así como $\hat{k} \times \hat{e}_\phi = -\hat{e}_r$ por lo que

$$\vec{L} = mr^2\omega\,\hat{k} - mrz\omega\,\hat{e}_r = m(x^2+y^2)\omega\hat{k} - mzx\omega\,\hat{\imath} - myz\omega\,\hat{\jmath}. \tag{1.30}$$

Para un cuerpo rígido consideramos primeramente en lugar de la masa m, diferenciales de masa dm y denotamos con R_z a la distancia radial o mínima, hasta ahora denotada con $r = \sqrt{x^2+y^2}$, al eje de rotación (en este caso el eje z). Como segundo y último paso sumamos en el sentido de Riemann todas las contribuciones de todos los elementos de masas dm del cuerpo y obtenemos para la **componente z del momento angular del cuerpo rígido**

$$L_z = I_{zz}\,\omega, \tag{1.31}$$

en donde hemos definido al **momento de inercia** con respecto al eje z mediante

$$I_{zz} = \int_{Vol} R_z^2\,dm = \int_{Vol}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz. \tag{1.32}$$

Nótese que esta cantidad está dada completamente una vez que conocemos la forma del cuerpo rígido y hemos fijado la posición del eje z. Las unidades del momento (principal) de inercia I_{zz} son los Kilogramos metro^2. En el caso para el cual el sólido sea tan sólo unidimensional o bien bidimensional, las integrales tridimensionales se reducen lógicamente a integrales unidimensionales ó bien bidimensionales. Si la densidad de masa es constante, entonces la podemos sacar de las integraciones, simplificandose con ello el problema a la evaluación de

$$I_{zz} = \rho\int_{Vol} R_z^2\,dV. \tag{1.33}$$

Consideraremos ahora dos resultados que son de gran utilidad práctica en la evaluación de momentos de inercia.

Primeramente, supongamos que el cuerpo sólido en consideración es **completamente plano**, esto es, que es una región ó lámina completamente contenida en el plano $x-y$. Entonces, el momento de inercia con respecto al eje z estará dado por

$$I_{zz} = \int_{Vol} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_{Vol} x^2\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz + \int_{Vol} y^2\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz. \tag{1.34}$$

Pero el momento de inercia con respecto al eje x es simplemente

$$I_{xx} = \int_{Vol} y^2\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz, \tag{1.35}$$

ya que debido a que el objeto esta contenido completamente en el plano $x-y$, todas las coordenadas z de todos sus puntos son cero. Similarmente

$$I_{yy} = \int_{Vol} x^2\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz, \tag{1.36}$$

es el momento de inercia con respecto al eje y. Por lo que concluimos que el momento de inercia de cualquier objeto laminar plano al rededor de un eje perpendicular al plano que lo contiene es igual a la suma de los momentos de inercia alrededor de cualesquier dos ejes perpendiculares del mismo plano

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \tag{1.37}$$

IMP.▷ Este resultado se denomina **Teorema de los Ejes Perpendiculares**.

Consideremos ahora a un cuerpo sólido arbitrario cuyo momento de inercia alrededor del eje z en coordenadas cartesianas está dado por

$$I_{zz} = \int_{Vol} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz. \tag{1.38}$$

Expresemos a las coordenadas $\{x,y\}$ en términos de las coordenadas del centro de masas $\{x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}\}$ y de las coordenadas del mismo punto pero relativas al centro de masas y que llamaremos $\{x', y', z'\}$. Estas coordenadas están relacionadas mediante

$$x = x' + x_{cm}, \qquad y = y' + y_{cm}. \tag{1.39}$$

Substituyendo en la expresión para I_{zz} obtenemos desarrollando los cuadrados

$$I_{zz} = \int_{Vol} (x'^2+y'^2)\rho(x,y,z)dV + \int_{Vol} (x_{cm}^2+y_{cm}^2)\rho(x,y,z)dV +$$

$$2x_{cm}\int_{Vol} x'\rho(x,y,z)dV + 2y_{cm}\int_{Vol} y'\rho(x,y,z)dV. \tag{1.40}$$

Nos damos cuenta que el primer término es la distancia al cuadrado del centro de masas al eje z, que es con respecto al cual queremos conocer el momento de inercia. Llamemos $d = \sqrt{x_{cm}^2 + y_{cm}^2}$

a esta distancia. El segundo término es el momento de inercia con respecto a un eje paralelo al eje z que pasa por el centro de masa. A este momento de inercia lo llamaremos I_{cm}. Finalmente el tercer y cuarto términos se anulan por la definición misma de centro de masa. Por ejemplo, tenemos que

$$x' = \frac{1}{M}\int_{Vol} x\,\rho(x'', y'', z'')dx''dy''dz'' \;-\; x_{c.m.}. \tag{1.41}$$

Con lo cual

$$\int_{Vol} x'\rho(x, y, z)dV = \frac{1}{M}\int_{Vol}\int_{Vol} x\,\rho(x, y, z)\,\rho(x'', y'', z'')dV\,dV'' \;-\; Mx_{c.m.} =$$

$$Mx_{cm} \;-\; Mx_{cm} = 0, \tag{1.42}$$

ya que

$$x_{c.m.} = \frac{1}{M}\int_{Vol} x''\,\rho(x'', y'', z'')dx''dy''dz''. \tag{1.43}$$

Resumimos estos resultados con la siguiente relación

$$I_{zz} = I_{cm} \;+\; Md^2. \tag{1.44}$$

Aquí, M es la masa total del sólido y d es la distancia entre los ejes paralelos z y el que pasa por el centro de masa. Este resultado es conocido como el **Teorema de los Ejes Paralelos**. ◁**IMP.**

1.3.3 Torca y Momento Angular: Eje Fijo

Dado que estamos considerando por el momento a un sólido que está restringido a moverse al rededor de un eje fijo, la **torca** neta tendrá como componente única distinta de cero a aquella con la dirección del eje de rotación, y por ello tendremos que la unica componente distinta de cero es

$$\tau_z = \dot{L}_z = I_{zz}\,\alpha, \tag{1.45}$$

para cuya deducción usamos que el momento de inercia no depende del tiempo para un cuerpo rígido y que $\alpha = \dot{\omega}$.

Finalmente, para la energía cinética de un elemento de masa dm que describe un círculo de radio R_z alrededor del eje z con velocidad angular $\omega\,\hat{k}$, está dada por $(dm)R_z^2\omega^2/2$, por lo que nuevamente sumando en el sentido de Riemann todas las contribuciones sobre el volumen del sólido obtenemos para la **energía cinética del cuerpo rígido** *rotando alrededor de un eje fijo*

$$E_{cin} = \frac{1}{2}I_{zz}\omega^2. \tag{1.46}$$

1.3.4 Cuerpos Rodando

Un caso particular de movimiento laminar es el rodamiento de cuerpos rígidos cuya sección transversal son círculos. Ejemplos son la esfera, el cascarón esférico, el cilindro, el disco, el aro y el anillo (los últimos tres sin inclinación).

Tenemos dos posibles casos por considerar. El primero ocurre cuando debido a la fricción entre el cuerpo rodando y la superficie sobre la que rueda, no ocurre deslizamiento alguno. A esta situación se le llama **rodar sin deslizar** o bien **rodar sin resbalar**. Si llamamos x a la dirección del movimiento del centro de masas y ϕ al ángulo que se desplaza el punto de contacto del sólido, y denotamos por r al radio del círculo, entonces

$$x_{c.m.} = r\,\phi, \quad v_{c.m.} = r\,\omega, \quad a_{c.m.} = r\,\alpha, \tag{1.47}$$

con $\omega = \dot{\phi}$, $\alpha = \dot{\omega}$, $v_{c.m.} = \dot{x}_{c.m.}$ y $a_{c.m.} = \dot{v}_{c.m.}$. La energía cinética del sólido estará dada por

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m\, v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2, \tag{1.48}$$

en donde el primer sumando es la energía cinética traslacional del sólido y m es su masa.

El segundo caso a considerar sucede cuando el sólido rueda deslizandose. En este caso ya no se pueden aplicar las ecuaciones ec.(1.47) y debe de emplearse como modelo de fricción a la fuerza de fricción cinética cuyo módulo está dado mediante

$$f_{cin} = \mu\, N, \tag{1.49}$$

en donde μ es el coeficiente de fricción cinético y N es el módulo de la fuerza normal que la superficie ejerce sobre el sólido.