Primer Examen Parcial de Introducción al Cálculo

Profesor Carlos Barrón Romero — martes 17 de febrero de 2015, trimestre 15I

SOLUCION.

Las preguntas del examen suman 20 puntos, seleccionar y contestar preguntas para 12 puntos y obtener 10 de calificación.

1. Encontrar el intervalo donde se cumplen las siguientes desigualdades:

   (a) [1.0] $2x - 11 \leq -x - 10$.
   RESPUESTA.
   $2x - 11 + x + 11 \leq -x - 10 + x + 11, 3x \leq 1, x \leq \frac{1}{3}$.
   El intervalo es $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$.

   (b) [1.0] $|8x - 3| \geq 1$.

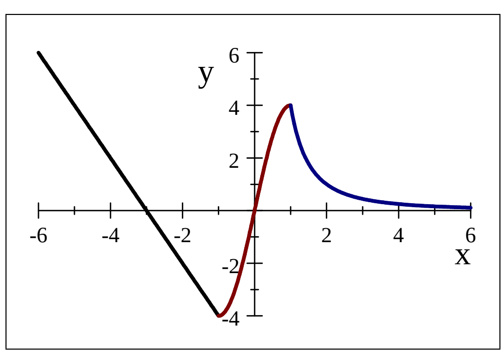
   RESPUESTA.
   $|8x - 3| \geq 1$, se tienen dos casos: (a) $8x - 3 \geq 1$ y (b) $-(8x - 3) \geq 1$.
   Para (a) $8x - 3 + 3 \geq 1 + 3, 8x \geq 4, x \geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
   El intervalo de (a) es $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.
   Para (b) $-(8x - 3) \geq 1, -8x + 3 \geq 1, -8x + 3 + 8x - 1 \geq 1 + 8x - 1, 2 \geq 8x, \frac{1}{4} \geq x$.
   El intervalo de (b) es $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$.
   El intervalo búscado es $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

2. Dada la función:
$$g(x) = \begin{cases} |2x+2| - 4 & x \in (-\infty, -1), \\ 4\sin(\frac{\pi}{2}x) & x \in [-1, 1], \\ \frac{4}{x^2} & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

   Para la función $g(x)$ encontrar (a) [1.0] dominio, (b) [1.0] rango, (c) [1.0] ceros, (d) [1.0] asíntotas, (e) [1.0] trazar la gráfica, (f) [1.0] indicar si es continua, (g) [1.0] indicar si es par o impar, (h) [1.0] indicar los intervalos donde es creciente o decreciente.

   RESPUESTA.

   (e) La gráfica de $g(x)$ es



(a) El dominio de $g(x)$ es $(-\infty, \infty)$.

(b) El rango de $g(x)$ es $[-4, \infty)$.

(c) Los ceros de $g(x)$ son $x_1 = -3$ y $x_2 = 0$.

(d) La función tiene como asíntota, $y = 0$, en el intervalo donde $x \in (1, \infty)$.

(f) De acuerdo con la gráfica, es posible dibujarla sin levantar el lapíz, $g(x)$ es una función continua.

(g) La función $g(x)$ no es par o impar.

(h) La función $g(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$, es creciente en $[-1, 1]$ y decreciente en $(1, \infty)$.

3. Energía cinética. La energía cinética K de una masa es proporcional al cuadrado de su velocidad v. Si $K = 12,560$ joules, cuando $v = 10m/s$, donde m: metros y s: segundos. (a) [1.0] Escribir la fórmula de la energía cinética K como función de v. (b) [1.0] Calcular el valor de K cuando $v = 5m/s$.(c) [1.0] Calcular el valor de K cuando $v = 20m/s$.

   RESPUESTA.

   (a) Por regla de 3, se tiene 12,560 es a $(10)^2$, como K es a v^2. De donde $K(v) = \frac{12{,}560}{(10)^2} v^2 = 125.6v^2$.

   La fórmula es $K(v) = 125.6v^2$.

   (b) Usando la función, se tiene $K(5) = 125.6(5)^2 = 3140.0$ joules.

   (c) Usando la función, se tiene $K(20) = 125.6(20)^2 = 50240.0$ joules.

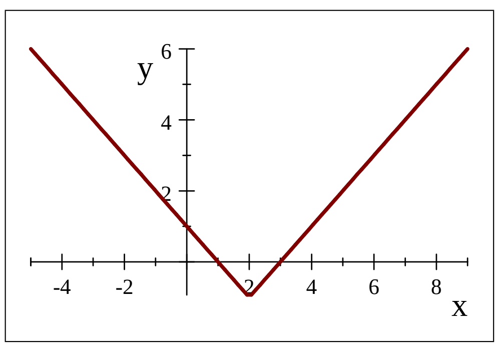
4. Sean $f(x) = x^2 - 4x$ y $h(x) = \sqrt{x+4} - 1$. Para $(h \circ f)$ encontrar (a) [1.0] dominio, (b) [1.0] rango, (c) [1.0] ceros y (d) [1.0] trazar la gráfica.

   RESPUESTA.

   $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(x^2 - 4x\right) = \sqrt{(x^2 - 4x) + 4} - 1 = \sqrt{(x-2)^2} - 1 = |x-2| - 1.$

   La función es $(h \circ f)(x) = |x-2| - 1$.

   (d) La gráfica es



   (a) El dominio natural es $(-\infty, \infty)$.

   (b) El rango es $[-1, \infty)$.

   (c) Los ceros son $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

5. Sean las funciones:

$$f(x) = 3x + 1; g(b) = (b)^{\frac{3}{2}}.$$

   [1.0] Explicar o justificar si el dominio de $(f \circ g)(x)$ es o no es el intervalo $\left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$.

RESPUESTA.
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = 3x^{\frac{3}{2}} + 1 = 3\sqrt{x^3} + 1.$

El dominio natural es cuando $x^3 \geq 0$, $x \geq 0$, o sea en el intervalo $[0, \infty)$.

El intervalo $\left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$ no es el dominio de $(f \circ g)(x)$.

6. Explicar (escribir los pasos de álgebra o mediante una gráfica) para verificar si los intervalos corresponden con las desigualdades:

   (a) [1.0] $-x^2 + 25 \geq 0$, su intervalo es $[-5, 5]$.

   RESPUESTA.
   $-x^2 + 25 + x^2 \geq 0 + x^2, 25 \geq x^2, 5 \geq \sqrt{x^2} = |x|$. Se tiene $5 \geq x \geq -5$.

   El intervalo si corresponde ya que es $[-5, 5]$.

   (a) [1.0] $\frac{4x+5}{3x+1} \leq 0$, su intervalo es $\left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{3}\right)$.

   RESPUESTA.
   $\frac{4x+5}{3x+1} \leq 0$, se tienen dos casos: (a) $4x + 5 \geq 0$ y $3x + 1 < 0$. (b) $4x + 5 \leq 0$ y $3x + 1 > 0$.

   (a) $4x + 5 \geq 0, 4x \geq -5, x \geq -\frac{5}{4}$, resulta el intervalo $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ y además, $3x + 1 < 0, 3x < -1, x < -\frac{1}{3}$, resulta el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$. El intervalo de (a) se obtiene de $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right) \cap \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) = \left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{3}\right)$.

   (b) $4x+5 \leq 0, 4x \leq -5, x \leq -\frac{5}{4}$, resulta el intervalo $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right]$ y además, $3x+1 > 0, 3x > -1, x > -\frac{1}{3}$, resulta el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$. El intervalo de (a) se obtiene de $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right] \cap \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) = \phi$.

   De (a) y (b) se tiene que el intervalo si corresponde ya que es $\left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{3}\right)$.