Tercer Examen Parcial de Introducción al Cálculo

Profesor Carlos Barrón Romero — martes 31 de marzo de 2015, trimestre 15I

Solución

Las preguntas del examen suman 12 puntos, seleccionar y contestar 10 puntos para obtener 10 de calificación.

1. Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{4x^2 - 4x + 1}.$$

Obtener:

RESPUESTA.

Factorizando la función:

$f(x) = \frac{2x^2-7x+3}{4x^2-4x+1} = \frac{(2x-1)(x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{(x-3)}{2x-1}$

(a) [1.0] El dominio, raíces o ceros y la paridad de la función.

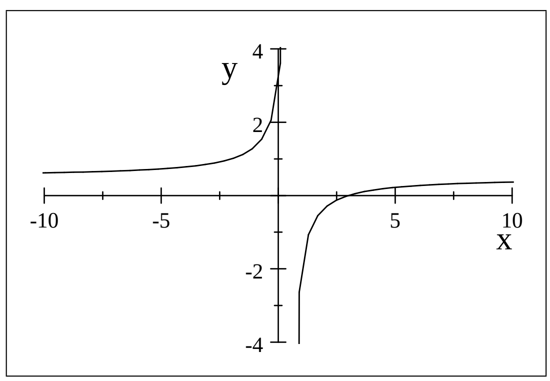
RESPUESTA.

Dominio de $f(x)$: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Raices de $f(x)$: $x_1 = 3$.

Paridad: $f(-x) = \frac{((-x)-3)}{2(-x)-1} = \frac{-(x+3)}{-(2x+1)} = \frac{(x+3)}{(2x+1)} \neq -f(x)$ y $\frac{(x+3)}{(2x+1)} \neq f(x)$. No es par, ni impar.

(d) [1.0] La gráfica de la función



(b) [1.0] Los intervalos de continuidad y clasificar sus discontinuidades.

RESPUESTA.

La función $f(x)$ es continua en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Como $f(x) = \frac{2x^2-7x+3}{4x^2-4x+1} = \frac{(2x-1)(x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{(x-3)}{(2x-1)}$.

El punto $\frac{1}{2}$ es una discontinuidad fija y removible.

(c) [1.0] Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

RESPUESTA.

Como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x-1}(x-3) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x-1}(x-3) = \frac{1}{2}$, la recta $y = \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$ es una asíntota horizontal.

Como $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{1}{2x-1}(x-3) = \infty$ y $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{1}{2x-1}(x-3) = -\infty$, la recta $x = \frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}$ es una asíntota vertical.

(e) [1.0] El rango, los intervalos de monotonía y los intervalos donde $f(x) > 0$.

RESPUESTA.

De la gráfica se nota que el rango de $f(x)$ es $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

La función $f(x)$ es creciente en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

El intervalo donde $f(x) > 0$ es $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y $(3, \infty)$.

2. Sea la función: $d(t) = 2t - t^2$.

   (a) [1.0] Encontrar la ecuación de la recta secante que pasa por los puntos $(2, d(2))$ y $(3, d(3))$.
   RESPUESTA.
   $m = \frac{d(3)-d(2)}{3-2} = \frac{2(3)-3^2-\left(2(2)-2^2\right)}{3-2} = -3.$
   $m = \frac{y-0}{x-2} = \frac{y}{x-2}$. Por tanto la recta secante es $y = -3x + 6$.

   (b) [1.0] Determinar la tasa de cambio instántanea en $x = 2$ a través de su definición por límites.
   RESPUESTA.
   $\lim_{h\to0} \frac{d(2+h)-d(2)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{2(2+h)-(2+h)^2-\left(2(2)-(2)^2\right)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{4+2h-\left(4+4h+h^2\right)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{-2h-h^2}{h} = \lim_{h\to0}(-2-h) = -2.$

   (c) [1.0] Determinar la ecuación de la normal en el punto $(2, d(2))$.
   RESPUESTA.
   La pendiente de la normal en $x = 2$ es $n = -\frac{1}{m}$, donde m es tasa ce cambio instantanea en $x = 2$.
   Del inciso anterior $m = -2$, por tanto $n = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.
   La recta normal se obtiene de $\frac{1}{2} = \frac{y-0}{x-2}$. La recta normal en $x = 2$ es
   $y = \frac{1}{2}x - 1.$

3. Sea la función:

$$g(x) = \begin{cases} -3x^2 + x + A & x < -2, \\ x & |x| \leq 2 \\ \frac{2-x}{x} + B & x > 2. \end{cases}$$

(a) [1.0] Determinar valores de A y B para que la función sea continua .

RESPUESTA.

Usando que $\lim_{x\to-2^+} g(x) = \lim_{x\to-2^+} x = -2$ y $\lim_{x\to2^-} g(x) = \lim_{x\to2^-} x = 2$. Tenemos

$\lim_{x\to-2^-} g(x) = -3(-2)^2 + (-2) + A = -2,\ -12 + (-2) + A = -2,\ A = 12.$

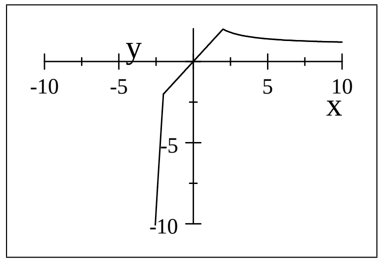
$\lim_{x\to2^+} g(x) = \frac{2-(2)}{2} + B = 2.\ B = 2.$

(b) [1.0] Determinar dominio y rango de $g(x)$.

RESPUESTA.

El dominio es **R.**

El rango es $(-\infty, 2]$. Esto se puede corroborar de la grafica:

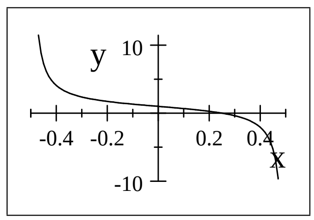


4. [2.0] Encontrar un intervalo de longitud $\dfrac{1}{4}$ que contenga una solución de la ecuación $1 - \tan(\pi x) = 0$.

RESPUESTA.

Como $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, la función $1 - \tan(\pi x)$ tiene un cero en $x = \frac{1}{4}$ y es monotona decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La grafica de $1 - \tan(\pi x)$ es



En el intervalo $\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right]$ se tiene que $1 - \tan\left(\pi \frac{1}{8}\right) > 0$ y $1 - \tan\left(\pi \frac{3}{8}\right) < 0$ y $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.