UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-AZC

Examen Departamental Global de Introducción al Cálculo

Trimestre 15I MATUTINO

SOLUCION

El examen global consta de los problemas marcados con $\star$. Quienes recuperen una parte del curso deberán resolver todos los problemas de esa parte.
Todas las respuestas deben tener su desarrollo o justificación.

Primera Parte

1. Resolver las siguientes desigualdades:

   (5%) (a) $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

   RESPUESTA.

   $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$, Solution is: $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

   (b) $\bigstar$ (5%) $\dfrac{3-2x}{2x-1} \leq 0$.

   RESPUESTA.

   $\dfrac{3-2x}{2x-1} \leq 0$, Solution is: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

2. $\bigstar$ (10%) Sean las funciones: $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ y $h(x) = 2x - 4$.

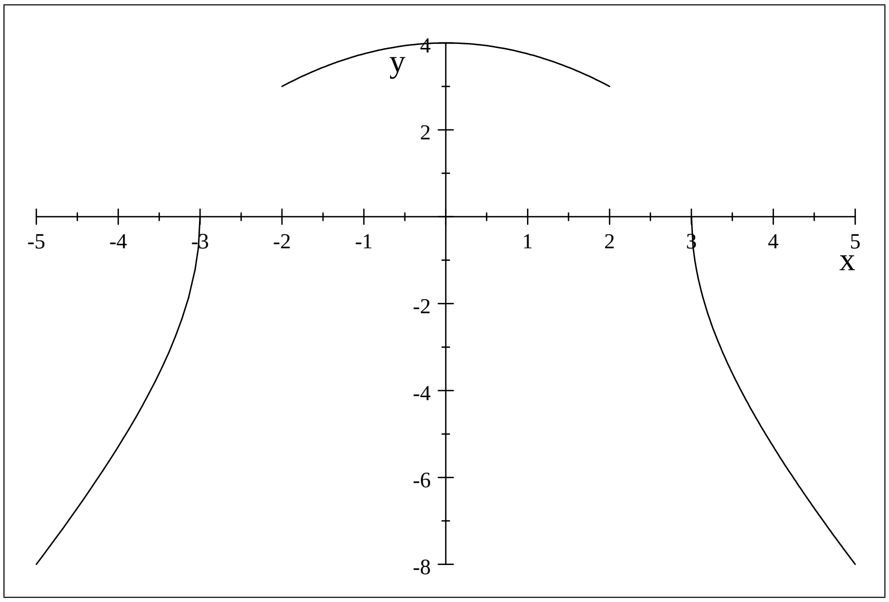
   (a) Determinar dominio de $f(x)$ y dominio de $h(x)$.
   RESPUESTA.
   Dominio de $f(x)$ es cuando $16 - x^2 \geq 0$, Solution is: $[-4, 4]$.
   Dominio de $h(x)$ es $\mathbb{R}$.

   (b) Determinar $\left(\dfrac{h}{f}\right)(x)$ y $(f \circ h)(x)$, sus dominios y raíces.
   RESPUESTA.
   $\left(\dfrac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{2x-4}{\sqrt{16-x^2}}$. Su dominio es $(-4, 4)$ y su raiz es $\frac{2x-4}{\sqrt{16-x^2}} = 0$, Solution is: 2.

   $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(2x-4) = \sqrt{16 - (2x-4)^2} = 2\sqrt{x(4-x)}$. Su dominio $x(4-x) \geq 0$, Solution is: $[0, 4]$, sus raices son 0 y 4.

3. (65%) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4x^2 - 36} & \text{si } x \in (-5, -3], \\ \dfrac{16 - x^2}{4} & \text{si } |x| \leq 2, \\ -\sqrt{4x^2 - 36} & \text{si } x \in [3, 5). \end{cases}$

   (a) Realizar un bosquejo de la gráfica y determinar su dominio.
   RESPUESTA.
   $-\sqrt{4x^2 - 36}$



Dominio de f es $(-5,-3] \cup [-2,2] \cup [3,5)$.

(b) Determinar: las raíces o ceros, la paridad, el rango, los intervalos de monotonía y los intervalos donde $f(x)$ es menor o igual a cero y donde $f(x)$ es mayor a cero.

RESPUESTA.

Raices -3 y 3.

Paridad par, es simetrica respecto al eje vertical.

Rango de f es $(-8,0] \cup [3,4]$.

Intervalos de monotonia, f es creciente en $(-5,-3]$ y $[-2,0]$; f es decreciente $[0,2]$ y $[3,5)$.

En $(-5,-3]$ y $[3,5)$ se tiene $f(x) \leq 0$.

En $[-2,2]$ se tiene $f(x) \geq 0$.

4. ★ (15%) Se va a construir un tanque de acero para almacenar gas con capacidad de 20π pies^3. La forma del tanque es un cilindro circular recto con 2 semiesferas en los extremos. Expresar la superficie total del tanque en función del radio de las semiesferas. La fórmula del volumen de una esfera es $V(r) = \frac{4\pi}{3} r^3$ y la fórmula del área de una esfera es $A(r) = 4\pi r^2$ donde r es el radio de la esfera.

RESPUESTA.

V: Volumen del tanque.

$V = \pi r^2 h + \frac{4\pi}{3} r^3$ donde r es el radio y h es la altura. De donde $20\pi = \pi r^2 h + \frac{4\pi}{3} r^3$, Solution is: $h = -\frac{1}{3r^2}\left(4r^3 - 60\right)$.

T: área total del tanque.

$T = 4\pi r^2 + 2\pi r h$. De donde

$T(r) = 4\pi r^2 + 2\pi r\left(-\frac{1}{3r^2}\left(4r^3 - 60\right)\right) = \frac{4}{3}\frac{\pi}{r}\left(r^3 + 30\right)$.

Segunda Parte

1. ★ (15%) Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{(3x+1)(2x-1)}{\left|x - \frac{1}{2}\right|}$.

RESPUESTA. $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{(3x+1)(2x-1)}{\left|x - \frac{1}{2}\right|} = -5$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \dfrac{(3x+1)(2x-1)}{\left|x-\frac{1}{2}\right|} = 5.$

No tiene $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(3x+1)(2x-1)}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}$.

(b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\tan^2(2h)}{h\operatorname{sen}(h)}$.

RESPUESTA.

$\lim_{h\to 0} \dfrac{\tan^2(2h)}{h\sin(h)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{\sin^2(2h)}{\cos^2(2h)}}{h\sin(h)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin^2(2h)}{h\sin(h)\cos^2(2h)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin^2(2h)}{h\sin(h)\cos^2(2h)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(2\sin(h)\cos(h))^2}{h\sin(h)\cos^2(2h)}$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{4\cos(h)^2}{\cos^2(2h)} = 4.$

(c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2+6}\right)$.

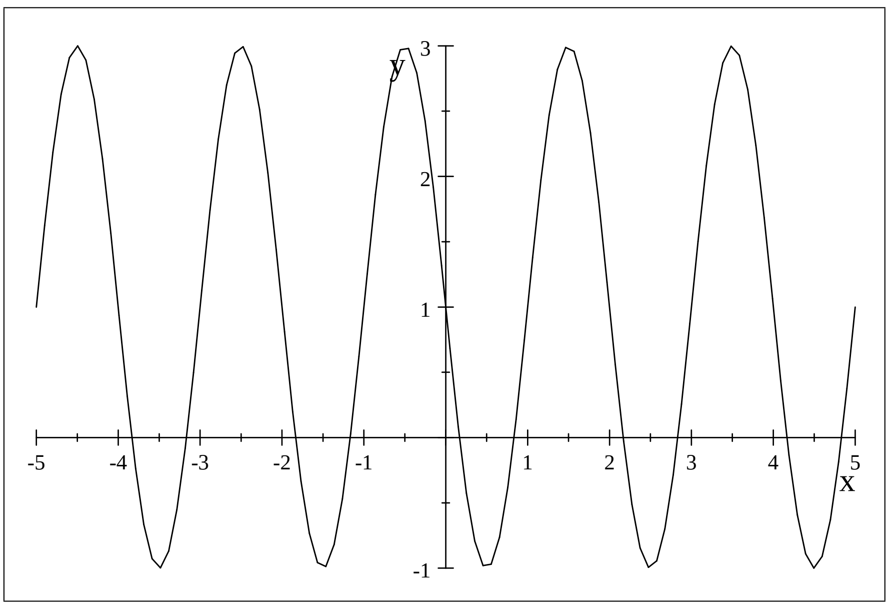
RESPUESTA.

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2+6}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2+6}\right)\frac{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+6}} =$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+2x+4-\left(x^2+6\right)\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+6}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+6}} = -1.$

2. ★ (15%) Sea la función: $g(\theta) = -2\operatorname{sen}(\pi\theta) + 1$.

   (a) Realizar un bosquejo de su gráfica.
   RESPUESTA.



   (b) Determinar su dominio, rango, amplitud y periodo.
   Dominio: $\mathbb{R}$, rango: $[-1,3]$, amplitud: 2 y periodo: 2.

3. (70%) Sea la función: $f(x) = \dfrac{1}{x^3-2x^2}$. Obtener:

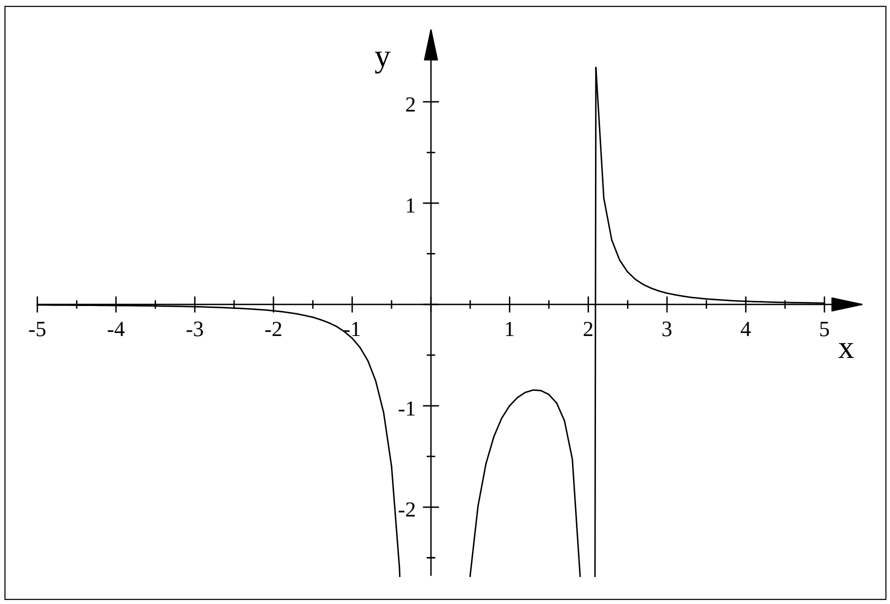
   (a) Dominio, raíces o ceros y la paridad de la función.
   RESPUESTA.
   $f(x) = \dfrac{1}{x^3-2x^2} = \frac{1}{x^2(x-2)}$.

Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.
No tiene raices.
No es par, ni impar (no tiene simetria).

(b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales.
RESPUESTA.
$y=0, x\in\mathbb{R}$.

(c) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.
$x=0, y\in\mathbb{R}$ y $x=2, y\in\mathbb{R}$.

(d) Esbozo de la gráfica de la función.



(e) Rango, los intervalos de monotonía e intervalos donde $f(x)\le 0$.
Rango: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2(x-2)}\right)=-\frac{1}{x^3}\frac{3x-4}{(x-2)^2}$
Intervalos de monotonia.
En $(-\infty,0)$ es decreciente.
En $\left(0,\frac{4}{3}\right]$ es creciente.
En $\left[\frac{4}{3},2\right)$ es decreciente.
En $(2,\infty)$ es decreciente.
$f(x)\le 0$, en $(-\infty,0)\cup(0,2)$.

Tercera Parte

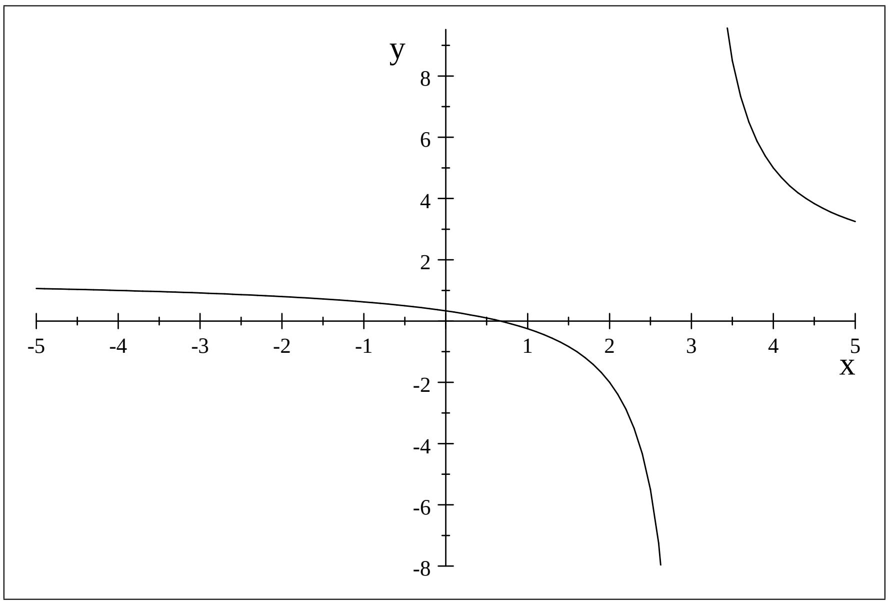
1. ★ (25%) Sea la función: $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-4}{2x^2-2x-12}$. Obtener:

(a) Dominio, raíces o ceros y la paridad de la función.
RESPUESTA.
$f(x)=\dfrac{3x^2+4x-4}{2x^2-2x-12}=\dfrac{(3x-2)(x+2)}{(2x-6)(x+2)}=\frac{3x-2}{2x-6}$
Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
Raíz: $\frac{2}{3}$.
No par, ni impar (no tiene simetrias).

(b) Los intervalos de continuidad y clasificar sus discontinuidades.
RSPUESTA.
Es continua en $(-\infty, 3)$ y en $(3, \infty)$.
Tiene una dsicontinuidad removible en $x = -2$.
En $x = 3$ tiene una discontinuidad fija.

(c) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
RESPUESTA.
Asíntota horizontal:$y = \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}$.
Asíntota vertical: $x = 3, y \in \mathbb{R}$

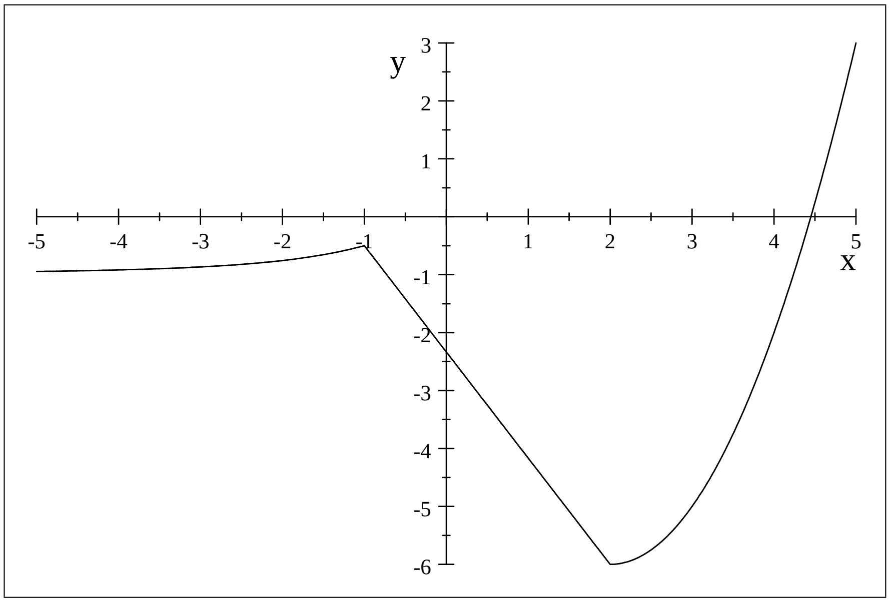
(d) Esbozo de la gráfica de la función.



(e) Rango, los intervalos de monotonía y los intervalos donde $f(x) \leq 0$.
Rango: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
En $(-\infty, 3)$ es decreciente y en $(3, \infty)$ es decreciente.
$f(x) \leq 0$ en $\left[\frac{2}{3}, 3\right)$.

2. (40%) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} & \text{si } x < -1, \\ 2cx + d & \text{si } -1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 4x - 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$

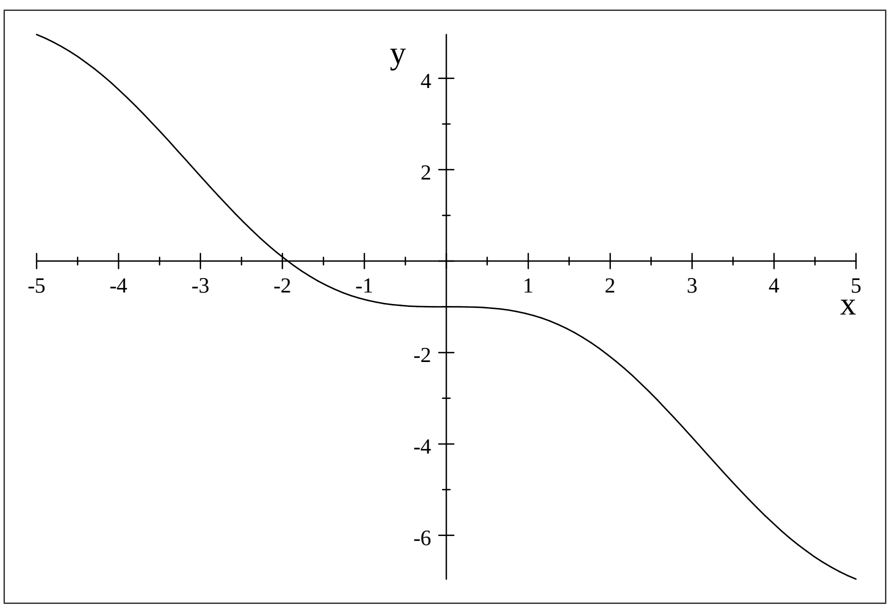
Obtener los valores de c y d para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.
RESPUESTA.
$\lim_{x \to -1^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} = -\frac{1}{2}$.
$\lim_{x \to 2^+} \left(x^2 - 4x - 2\right) = -6$
Se tiene $-\frac{1}{2} = 2c(-1) + d$ y $-6 = 2c(2) + d$.
$-\frac{1}{2} = -2c + d$
$-6 = 4c + d$.
$\begin{matrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} c \\ d \end{matrix} = \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -6 \end{matrix}$, Solution is: $\begin{matrix} c = -\frac{11}{12} \\ d = -\frac{7}{3} \end{matrix}$.



3. (20%) Encontrar un intervalo de longitud $\frac{\pi}{4}$ que contenga una solución de la ecuación $\operatorname{sen}(x) - x - 1 = 0$.

RESPUESTA.

$\sin(x) - x - 1$



$\sin(-2) - (-2) - 1 = 9.070\,257\,317 \times 10^{-2} > 0.$

$\sin\left(-2 + \frac{\pi}{4}\right) - \left(-2 + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -0.722\,628\,790\,1 < 0.$

$\left[-2, -2 + \frac{\pi}{4}\right] = [-2, -1.\,214\,601\,837]\,.$

Sea $g(x) = \sin(x) - x - 1$

$g\left(-\frac{5}{8}\pi\right) =:\ 3.\,961\,587\,598 \times 10^{-2} > 0$

$g\left(-\frac{1}{8}\pi\right) = -0.989\,984\,350\,7$

4. ★ (15%) Sea la función: $f(t) = 4t^2 + 2t$.

(a) Encontrar la ecuación de la recta secante que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(2, f(2))$.
$m = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 14$.
$14 = \frac{y-f(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}(y-6)$, $14 = \frac{1}{x-1}(y-6)$, Solution is: $y = 14x - 8$.

(b) Determinar la tasa de cambio instantanea en $t = 1$ a través de su definición por límites.
$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 10$.

(c) Determinar la ecuación de la tangente en el punto $(1, f(1))$.
$10 = \frac{y-f(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}(y-6)$, $10 = \frac{1}{x-1}(y-6)$, Solution is: $y = 10x - 4$