Ejemplos del 2do Examen Parcial de Introducción al Cálculo

Profesor Carlos Barrón Romero 24 de febrero de 2015

Trimestre 15O

1. Dada la función $h(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

   (a) Determinar la tasa de cambio promedio en los puntos $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$.

   (b) Determinar la tasa de cambio promedio en los puntos $x_0 = 0$ y $x_1 = \frac{1}{4}$.

   (c) Determinar la tasa de cambio promedio en los puntos $x_0 = 0$ y $x_1 = \frac{1}{16}$.

   (d) Determinar la tasa de cambio instantanea en el punto $x_0 = 0^+$.

   (e) Con los datos anteriores graficar las secantes de los incisos (a), (b), (c) y la tangente (d).

   (f) Calcular las ecuaciones de las rectas secantes y tangente de los incisos (a), (b), (c) y (d).

   RESPUESTAS.

   Fórmula de la tasa de cambio promedio:

$$\frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

   $h(0) = 2\sqrt{0} + 1 = 1$

   Sustituyendo, se tiene

   (a) $h(1) = 2\sqrt{1} + 1 = 3$

$$\frac{3-1}{1-0} = 2.$$

   (b) $h\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{4}} + 1 = 2$

$$\frac{2-1}{\frac{1}{4}-0} = 4.$$

   (c) $h\left(\frac{1}{16}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{16}} + 1 = \frac{3}{2}$

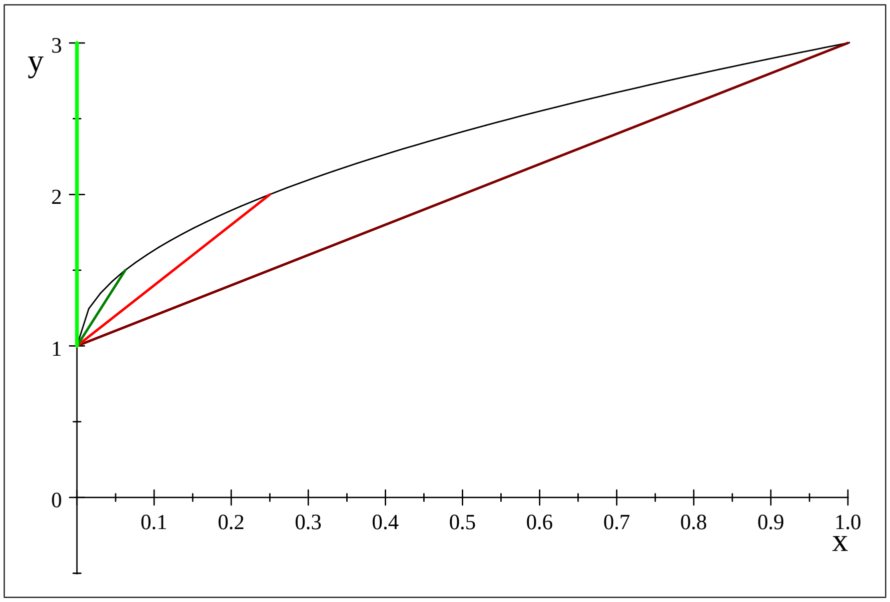
$$\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{16}-0} = 8.$$

   (d) $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{h(\Delta x) - h(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\sqrt{\Delta x} + 1 - \left(2\sqrt{0} + 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\sqrt{\Delta x} + 1 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2}{\sqrt{\Delta x}}$.

   Usando $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} = 0$. Sustituyendo $\Delta x = \frac{1}{2^{2n}}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2^{2n}}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(2^n\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} = \infty. \\ \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{h(\Delta x) - h(0)}{\Delta x} &= \infty. \end{aligned}$$

   (e)



(f)

m: tasa promedio o instantanea.

Respecto al punto $(0, h(0)) = (0, 1)$

$$m = \frac{y - h(0)}{x - 0} = \frac{y - 1}{x}$$

Sustituyendo

Recta de secante de (a): $2 = \frac{y-1}{x}$. Por tanto $y = 2x + 1$.

Recta de secante de (b): $4 = \frac{y-1}{x}$.Por tanto $y = 4x + 1$.

Recta de secante de (c): $8 = \frac{y-1}{x}$.Por tanto $y = 8x + 1$.

Recta tangente de (d): $x = 0, y \in [1, \infty)$.

2. Calcular el valor de los límites:

   (a) $\lim_{x \to \frac{2}{5}} \frac{\sqrt{5x+2}-2x+1}{3x^2-5x+10}$.
   RESPUESTA.
   Como $3\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 5\left(\frac{2}{5}\right) + 10 = 3\frac{4}{25} - 5\frac{2}{5} + 10 = \frac{12-50+250}{25}\frac{212}{25} \neq 0$.
   Se trata de un cociente de funciones que no se indetermina. Por sustitución se tiene
   $\lim_{x \to \frac{2}{5}} \frac{\sqrt{5x+2}-2x+1}{3x^2-5x+10} = \frac{\sqrt{5\left(\frac{2}{5}\right)+2}-2\left(\frac{2}{5}\right)+1}{\frac{212}{25}} = \frac{\sqrt{2+2}-\frac{4}{5}+1}{\frac{212}{25}} = \frac{2-\frac{4}{5}+1}{\frac{212}{25}} = \frac{\frac{10-4+5}{5}}{\frac{212}{25}} = \frac{\frac{11}{5}}{\frac{212}{25}} = \frac{11(25)}{212(5)} = \frac{55}{212}$.

   (b) $\lim_{x \to -2^+} \frac{\left|5x^2-20\right|-\left|\frac{x}{2}\right|+1}{|2x+4|}$.
   RESPUESTA.
   $\lim_{x \to -2^+} \frac{\left|5x^2-20\right|-\left|\frac{x}{2}\right|+1}{|2x+4|} = \frac{41}{4}$.
   En efecto sea $\varepsilon > 0$.
   $-2 < -2 + \varepsilon$. Haciendo $\varepsilon \to 0^+$,se acerca por la derecha. Sustituyendo $-2 + \varepsilon$ se tiene

   $\frac{\left|5(-2+\varepsilon)^2-20\right|-\left|\frac{-2+\varepsilon}{2}\right|+1}{|2(-2+\varepsilon)+4|} = \frac{\left|5\left(4-4\varepsilon+\varepsilon^2\right)-20\right|-\frac{|-2+\varepsilon|}{2}+1}{|(-4+2\varepsilon)+4|} = \frac{\left|20-20\varepsilon+5\varepsilon^2-20\right|-\frac{2-\varepsilon}{2}+1}{2\varepsilon} = \frac{\left|-20\varepsilon+5\varepsilon^2\right|-\frac{2-\varepsilon}{2}+1}{2\varepsilon}$
   $= \frac{20\varepsilon+5\varepsilon^2-\frac{2-\varepsilon}{2}+1}{2\varepsilon} = \frac{\frac{40\varepsilon+10\varepsilon^2-2+\varepsilon+2}{2}}{2\varepsilon} = \frac{40\varepsilon+10\varepsilon^2-2+\varepsilon+2}{4\varepsilon} = \frac{40+10\varepsilon+1}{4} = \frac{41+10\varepsilon}{4}$.

Cuando $\varepsilon \to 0^+$ se tiene $\lim_{x\to -2^+} \frac{\left|5x^2-20\right|-\left|\frac{x}{2}\right|+1}{|2x+4|} = \frac{41}{4}$.

(c) $\lim_{x\to -2^-} \frac{\left|5x^2-20\right|-\left|\frac{x}{2}\right|+1}{|2x+4|}$.
RESPUESTA.
$\lim_{x\to -2^-} \frac{\left|5x^2-20\right|-\left|\frac{x}{2}\right|+1}{|2x+4|} = \frac{39}{4}$.
En efecto $\varepsilon > 0$.
$-2-\varepsilon < -2$. Haciendo $\varepsilon \to 0^+$,se acerca por la izquierda. Sustituyendo $-2-\varepsilon$ se tiene
$\frac{\left|5(-2-\varepsilon)^2-20\right|-\left|\frac{-2-\varepsilon}{2}\right|+1}{|2(-2-\varepsilon)+4|} = \frac{\left|5\left(4+4\varepsilon+\varepsilon^2\right)-20\right|-\frac{|-2-\varepsilon|}{2}+1}{|(-4-2\varepsilon)+4|} = \frac{\left|20+20\varepsilon+5\varepsilon^2-20\right|-\frac{2+\varepsilon}{2}+1}{|(-4-2\varepsilon)+4|} = \frac{\left|20\varepsilon+5\varepsilon^2\right|-\frac{2+\varepsilon}{2}+1}{|-2\varepsilon|} =$
$\frac{20\varepsilon+5\varepsilon^2-\frac{2+\varepsilon}{2}+1}{2\varepsilon} = \frac{\frac{40\varepsilon+10\varepsilon^2-2-\varepsilon-2}{2}}{2\varepsilon} = \frac{40\varepsilon+10\varepsilon^2-\varepsilon}{4\varepsilon} = \frac{40+10\varepsilon-1}{4} = \frac{39+10\varepsilon}{4}$.
Cuando $\varepsilon \to 0^+$ se tiene $\lim_{x\to -2^-} \frac{\left|5x^2-20\right|-\left|\frac{x}{2}\right|+1}{|2x+4|} = \frac{39}{4}$.

RECORDAR: Cuando $|x| << 1, \sin(x) \approx x$.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.
RESPUESTA.
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$.

(e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|}$.
RESPUESTA.
$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$.

(f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|}$.
RESPUESTA.
$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$.

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}$.
RESPUESTA. Como no coinciden $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|}$ y $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|}$, no hay $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}$.

RECORDAR: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, multiplicar apropiadamente por $1+\cos x$.

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.
RESPUESTA.
De $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ se obtiene $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)} = \frac{0}{2} = 0$.

3. Determinar las rectas tangente y normal de $g(x) = x^3 - 4x + 1$ en el punto $x_0 = -1$.
RESPUESTA.
Sea $y_0 = g(x_0) = g(-1) = 4$.
La tasa de cambio instantanea es el valor de la tangente m.
$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3-4(x_0+h)+1-\left[(x_0)^3-4(x_0)+1\right]}{h} =$
$\lim_{h\to 0} \frac{x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-4x_0-4h+1-x_0^3+4(x_0)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-4h}{h} =$
$\lim_{h\to 0} 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 - 4 = 3x_0^2 - 4$.

Sustituyendo $x_0 = -1$.

$m = 3\left(-1\right)^2 - 4 = -1$.

La recta normal se obtiene de $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$. Sustituyendo,

$-1 = \frac{y-4}{x-(-1)}$. De donde la recta tangente en $(-1, 4)$ es $y = -x + 3$.

La recta normal se obtiene de $n = -\frac{1}{m}$ y $n = \frac{y-y_0}{x-x_0}$.

Sustituyendo,

$1 = \frac{y-4}{x-(-1)}$. De donde la recta normal en $(-1, 4)$ es $y = x + 5$.