Ejemplos del 2do Examen Parcial de Introducción al Cálculo

Profesor Carlos Barrón Romero 5 de marzo de 2015

Trimestre 15O

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

   (a) Determinar el dominio natural.

   RESPUESTA.

   Como se debe tener $x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \neq 0$, el dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

   (b) Determinar y clasificar las discontinuidades.

   RESPUESTA.

   Factorizando $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

   Se tiene una discontinuidad removible en $x = 3$. Se tiene $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}$.

   Además $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{x-2}{x+3}$. En $x = -3$ no hay límite, ya que límites laterales no coinciden, $\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \infty$ y $\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = -\infty$.

   (c) Escribir una extensión continua (sin las discontinuidades removibles de $f(x)$).

   Respuesta.

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} & \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \\ \frac{1}{6} & x = 3. \end{cases}$$

   (d) Determinar las rectas de las asíntotas verticales y horizontales.

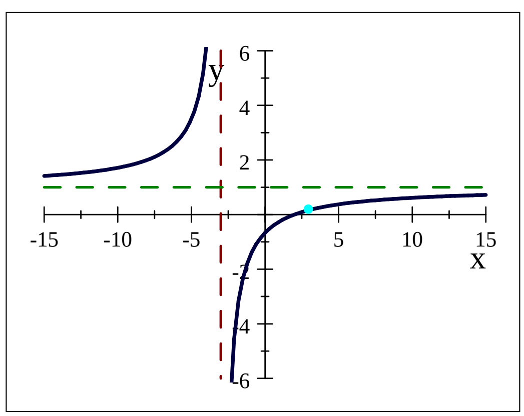
   Como $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = 1$ y $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = 1$.Esta función racional tiene la asíntota horizontal $y = 1, x \in \mathbb{R}$.

   Por otro lado, ya que $\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \infty$ y $\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = -\infty$, tiene una asíntota vertical en $x = -3, y \in \mathbb{R}$.

   (e) Esbozar la gráfica de $f(x)$.

   RESPUESTA.

   Se muestran las asíntotas y la discontinuidad removible.



2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+4x-5}{2(x+1)}$.

   (a) Determinar el dominio natural.

   RESPUESTA.

   $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, para que se cunpla que $x + 1 \neq 0$.

(b) Determinar y clasificar las discontinuidades.

RESPUESTA.

Como el denominador $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$ y el denominador $2(x+1)$ no tienen factores comunes, $f(x)$ no tiene discontinuidades removibles.

En $x=-1$, la función $f(x)$ es discontinua.

Se tiene que $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+4x-5}{2(x+1)} = \infty$ y $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+4x-5}{2(x+1)} = -\infty$.

(c) Escribir una extensión continua (sin las discontinuidades removibles de $f(x)$).

RESPUESTA.

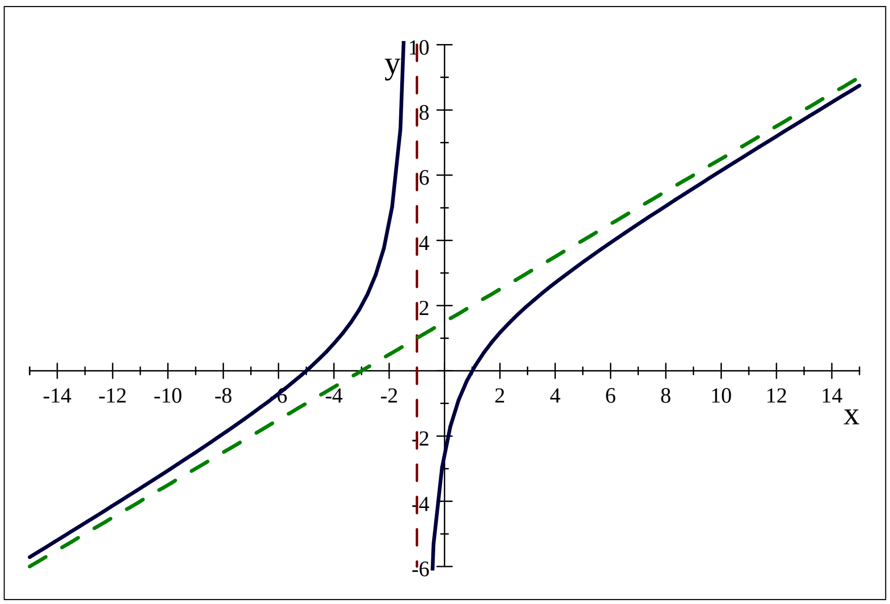
No hay una forma de extensión continua porque $f(x)$ no tiene discontinuidades removibles.

(d) Determinar las rectas de las asintotas verticales y horizontales.

Como $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+4x-5}{2(x+1)} = \infty$ y $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+4x-5}{2(x+1)} = -\infty$. $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -1, y \in \mathbb{R}$.

Por otro lado realizando la división: $\frac{x^2+4x-5}{2(x+1)} = \frac{1}{2}(x+3) - \frac{8}{2x+2}$, la recta $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)$ es una asíntota inclinada de $f(x)$.

(e) Esbozar la gráfica de $f(x)$.



(f) Determinar los ceros de $f(x)$.

RESPUESTA.

De la factorización del denominador $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$.Se tiene $x_1=-5$ y $x_2=1$ donde $f(x)$ es cero.

3. Calcular el valor de los límites:

   (a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi x)\sqrt{5x-1}-2x+1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)-5x+10}.$$

   RESPUESTA.

   Como son continuas las partes y no es una forma indeterminada, $\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi x)\sqrt{5x-1}-2x+1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)-5x+10} = \frac{\tan(\pi)\sqrt{5-1}-2+1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-5+10} = -\frac{1}{5}$.

(b)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{(3x+1)(2x-1)}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}.$$

RESPUESTA.
$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{(3x+1)(2x-1)}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}=-5.$

(c)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(3x+1)(2x-1)}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}.$$

RESPUESTA.
Calculando $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{(3x+1)(2x-1)}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}=5$. Los límites laterales no coinciden, por lo que no existe $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(3x+1)(2x-1)}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}$.

(d)

$$\lim_{x\to 1^-}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

RESPUESTA. $\lim_{x\to 1^-}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\infty.$

(e)

$$\lim_{x\to 1^+}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

RESPUESTA. $\lim_{x\to 1^+}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=-\infty$

(f)

$$\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

RESPUESTA. No existe porque los límites laterales no coinciden.

4. Para la función por secciones:

$$j(x)=\begin{cases} 3x^2-A & x\in[-2,0), \\ 2^x & x\in[0,2]. \end{cases}$$

Determinar el valor de A para exista $\lim_{x\to 0} j(x)$.
RESPUESTA.
Como $2^0=1$. Se tiene que tener que $3(0)^2-A=1$. De donde $A=-1$.

5. Para la función por secciones:

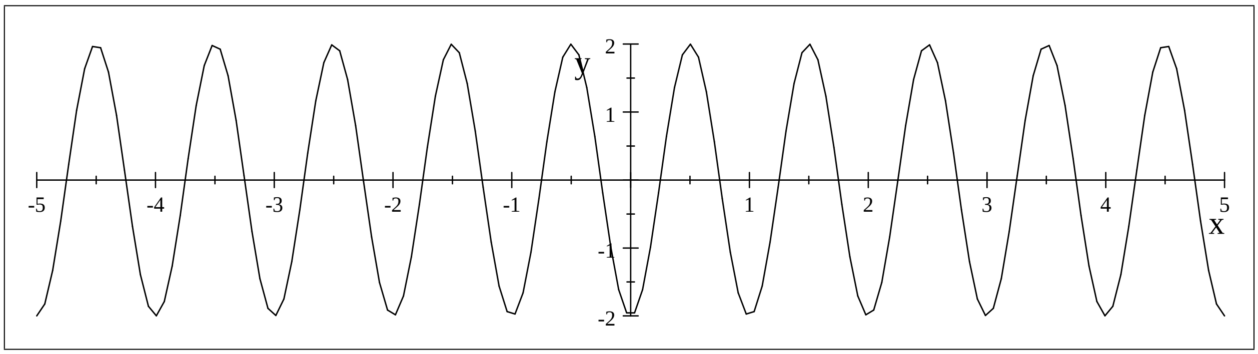
$$f(x)=\begin{cases} -\frac{x^3}{1-x} & x\in[-2,-1), \\ A+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x\in[-1,2]. \end{cases}$$

Determinar el valor de A para exista $\lim_{x\to -1} f(x)$.
RESPUESTA.
Como $-\frac{(-1)^3}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$. Se debe tener que $A+\sin\left(\frac{\pi}{2}(-1)\right)=\frac{1}{2}$, de donde $A=\frac{3}{2}$.

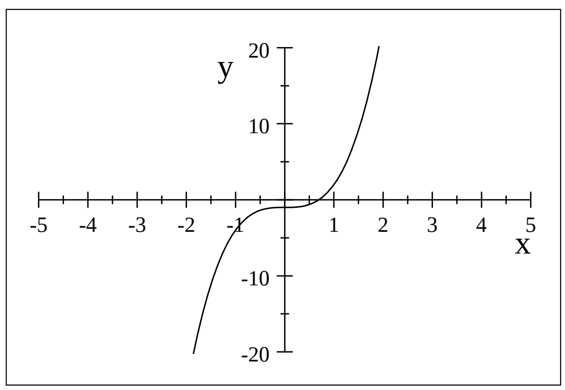
6. Para las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} g(\theta) &= -2\cos(2\pi\theta), \\ h(z) &= 3z^3 - 1. \end{aligned}$$

(a) Esbozar sus gráficas.
RESPUESTA.
Son obtenidas por dilatciones y traslaciones.
$g(\theta) = -2\cos(2\pi\theta)$



$h(z) = 3z^3 - 1$



(b) Determinar si son par o impar.
RESPUESTA.
Como $g(-\theta) = -2\cos(2\pi(-\theta)) = -2\cos(2\pi\theta) = g(\theta)$. La función $g(\theta)$ es par.
Como $h(-z) = 3(-z)^3 - 1 = -3z^3 - 1 = -\left(z^3 + 1\right)$. La función $h(z)$ no es impar, ni par.

(c) Determinar los intervalos donde son mayor a igual a cero.
RESPUESTA.
La función $g(\theta)$ es mayor o igual a cero en los intervalos $\left[\frac{4k+1}{4}, \frac{4k+3}{4}\right], k \in \mathbb{Z}$.
La función $h(z)$ es mayor o igual a cero en $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \infty\right)$. Porque $3z^3 - 1 \geq 0, 3z^3 \geq 1, z^3 \geq \frac{1}{3}$ de donde $z \geq \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.