Ejemplo de un 1er Examen Parcial de Introducción al Cálculo

CALCULODIFERENCIALEINTEGRALI
PRIMERA EVALUACION PARCIAL E3400
TRIMESTRE06-I
Referencia: http://canek.azc.uam.mx/Calculo1/Parcial1/S00/Par3400.pdf

1. Sean las funciones:
   $f(x) = \frac{3x-2}{x+4}$; $g(a) = \frac{4a+2}{-a+3}$; $h(x) = \frac{x^2-2x}{x+3}$ y $l(x) = \frac{x+3}{x}$.

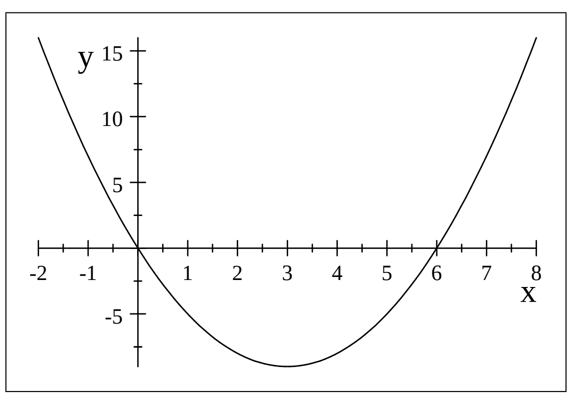
   (a) Obtener $(f \circ g)(x)$ y $(hl)(x)$ reduciendo las expresiones a su mínima expresión.
   RESPUESTA.
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{4x+2}{-x+3}\right) = \frac{3\left(\frac{4x+2}{-x+3}\right)-2}{\left(\frac{4x+2}{-x+3}\right)+4} = \frac{\left(\frac{12x+6}{-x+3}\right)-2}{\left(\frac{4x+2}{-x+3}\right)+4} = \frac{\frac{12x+6-2(-x+3)}{-x+3}}{\frac{4x+2+4(-x+3)}{-x+3}} = \frac{\frac{12x+6+2x-6}{-x+3}}{\frac{4x+2-4x+12}{-x+3}} =$
   $\frac{\frac{12x+6+2x-6}{-x+3}}{\frac{4x+2-4x+12}{-x+3}} =$
   $\frac{\frac{14x}{-x+3}}{\frac{14}{-x+3}} = \frac{14x(-x+3)}{14(-x+3)} = x.$

   $(hl)(x) = h(x)l(x) = \frac{x^2-2x}{x+3}\frac{x+3}{x} = x-2.$

   (b) Obtener los dominios de $(f \circ g)(x)$ y $(hl)(x)$.
   RESPUESTA.
   Como $(f \circ g)(x) = x$, su dominio es $\mathbb{R}$.

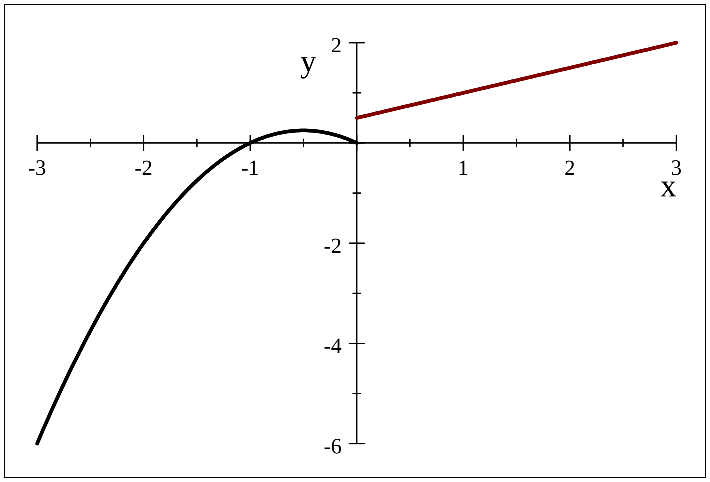
   Como $(hl)(x) = x-2$, su dominio es $\mathbb{R}$.

2. Resolver la siguiente desigualdad $x \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x$.
   RESPUESTA.
   $x \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x$,
   $0 \geq \frac{1}{2}x^2 - 3x$, $0 \geq x^2 - 6x = x(x-6)$, las raices son 0 y 6. Como es una parábola que abre hacia abajo,
   el intervalo es $[0, 6]$.



3. Sea la función:
   $$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & -3 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

(a) Hacer un bosquejo de la gráfica de $f(x)$.
RESPUESTA.

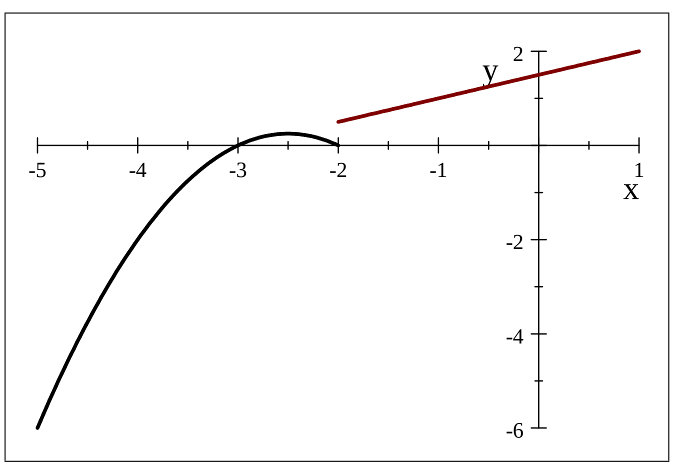


(b) Determinar el dominio, las raíces (ceros) y el rango de $f(x)$.
RESPUESTA.
El dominio de f es $[-3, 0) \cup (0, 3]$.
Las raices son -1 y 0.
El rango de f $[-6, 2]$.

(c) Encontrar los intervalos donde $f(x)$ crece y donde decrece.
RESPUESTA.
f crece en $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$.
f decrece en $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$.
f crece en $(0, 3]$.

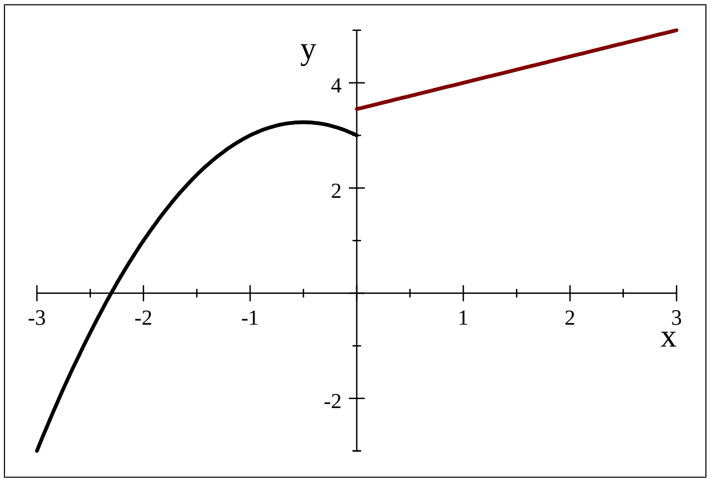
(d) Determinar si $f(x)$ es una función par o impar.
RESPUESTA.
No es par y no es impar.

(e) Hacer el bosquejo de la gráfica de $g(x) = f(x+2)$ y $h(x) = f(x) + 3$.
RESPUESTA.
$g(x) = f(x+2) = \begin{cases} -(x+2)^2 - (x+2) & -3 \leq (x+2) < 0, \\ \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{2} & 0 < (x+2) \leq 3. \end{cases} = \begin{cases} -x^2 - 5x - 6 & -5 \leq x < -2, \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & -2 < x \leq 1. \end{cases}$.
La gráfica de g es



$h(x) = f(x) + 3 = \begin{cases} -x^2 - x & -3 \leq (x+2) < 0, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & 0 < (x+2) \leq 3. \end{cases} + 3 = \begin{cases} -x^2 - x + 3 & -3 \leq (x+2) < 0, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3 & 0 < (x+2) \leq 3. \end{cases} =$
$\begin{cases} -x^2 - x + 3 & -3 \leq (x+2) < 0, \\ \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} & 0 < (x+2) \leq 3. \end{cases}$.

La gráfica de h es



4. Una cuerda de 30 cm de longitud debe cortarse en dos partes. Con una de ellas se formará un cuadrado y con la otra una circunferencia. Expresar el área total que forman las figuras geométricas en función del corte x en la cuerda.

   RESPUESTA.

   Las partes son x y $30 - x$.

   Tomando x para la circunferencia: $2\pi r = x$, de donde $r = \frac{x}{2\pi}$. El área del círculo es πr^2, sustituyendo r, se tiene $C(x) = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}x^2$.

   Por otro lado, el cuadrado tiene perímetro $4d = 30 - x$, de donde $d = \frac{30-x}{4}$. El area del cuadrado es d^2, sustituyendo d, se tiene $A(x) = \left(\frac{30-x}{4}\right)^2$.

   El área total $T(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \left(\frac{30-x}{4}\right)^2$.