Clase: jueves 29 de enero de 2015.

En esta clase se realizan ejercicios de los temas vistos: números reales, función valor absoluto, funciones lineales y determinación de intervalos que satisface desigualdades de la forma:

$ax + b \leq cx + d$ o $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Ejercicios.

1. Explicar con un ejemplo si es cierto que un número racional puede tener una representación como entero con fración periodica en una base numerica y el mismo número en otra base apropiada tiene una representación como entero y fracción finita. Sugerencia: Usar $1_{10}/3_{10}$ (el subindice indica que es en base 10) el un tercio en la base 10 y transformar en base 3.

   RESPUESTA.

   Sabemos que un número en una base tiene una relación de la forma:

   $(d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2})_b = d_1 b^1 + d_0 b^0 + d_{-1} b^{-1} + d_{-2} b^{-2}$.

   Como $0.1_3 = 0 * 3^0 + 1 * 3^{-1} = (1/3)_{10}$.

   Se tiene que el racional $(1/3)_{10} = (0.333333)_{10} = \left(0.\widehat{3}\right)_{10}$ tiene una expresión infinita y periodica en base 10, pero en base 3 es la expresión $(0.1)_3$.■

2. En un experimento se encontró que la temperatura crece con una expresión lineal respecto al tiempo: $T_1(t) = 10t + 2$. Y al enfriarse tiene una expresión de la forma: $T_2(t) = -2t + 20$. Cual es intervalo de tiempo donde se cumple que $T_1(t) \geq T_2(t)$.

   RESPUESTA.

   Sustituyendo las funciones, la desigualda a resolver es

   $10t + 2 \geq -2t + 20$.

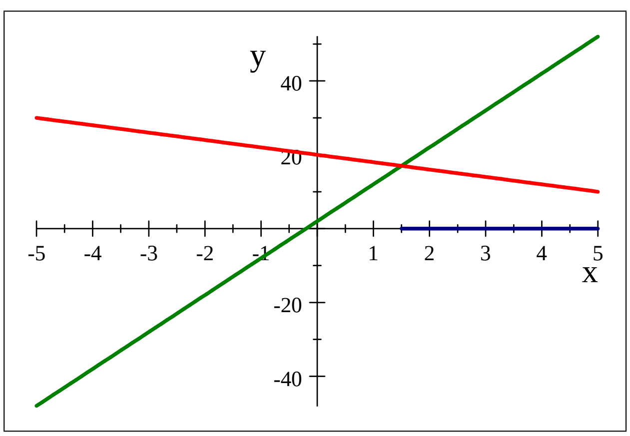
   Se despeja t (se pasa del lado izquierdo):

   $(2t + -2) + 10t + 2 \geq (2t + -2) - 2t + 20$, se tiene

   $12t \geq 18$, se tiene finalmente $t \geq \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$.

   Por tanto el intervalo es: $t \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

   Verificación por medio de la gráfica de las funciones T_1 y T_2.



   El intervalo búscado es la recta azul $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$, donde la recta verde (gráfica de T_1) está por arriba de la recta roja (gráfica de T_2).■

3. Determinar el intervalo donde se cumple la desigualdad: $\left|\frac{x}{3}-1\right|-4x\geq 0$.

   RESPUESTA.

   A la desigualdad se le suma $4x$ y se tiene $4x+\left|\frac{x}{3}-1\right|-4x\geq 4x+0$.

   Se obtiene $\left|\frac{x}{3}-1\right|\geq 4x$. Como se trata de un valor absoluto se tienen dos casos:

   a) $\frac{x}{3}-1\geq 0$, de donde despejando x se obtiene:$x\geq 3$.

   b) $\frac{x}{3}-1<0$, se tiene entonces $-\left(\frac{x}{3}-1\right)>0$. Se obtiene:$-\frac{x}{3}+1>0$.

   Despejando x se tiene: $3>x$.

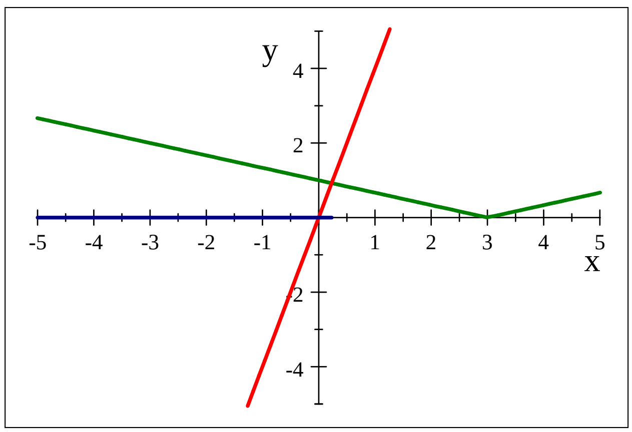
   Del caso a) se obtiene la recta $\frac{x}{3}-1$ con dominio $[3,\infty)$. Esta recta tiene pendiente $\frac{1}{3}$ y no intersecta a la recta $4x$ en el intervalo $[3,\infty)$.

   Del caso b) se obietne la recta $-\frac{x}{3}+1$ con dominio $(-\infty,3]$. Esta recta tiene pendiente $-\frac{1}{3}$ y como crece hacia el lado negativo, intersecta a la recta $4x$ en el intervalo $(-\infty,3]$.

   Se procede a calcular el punto de intersección de la relación: $-\frac{x}{3}+1=4x$.

   Despejando x se obtiene (se pasa del lado derecho): $\frac{x}{3}-\frac{x}{3}+1=\frac{x}{3}+4x$.Se obtiene: $1=\frac{x}{3}+4x=\frac{1+12}{3}x=\frac{13}{3}x$. Entonces $x=\frac{3}{13}$ Por tanto el intervalo búscado es $\left(-\infty,\frac{3}{13}\right]$.

   Verificación por medio de la gráfica de las funciones $\left|\frac{x}{3}-1\right|$y $4x$.



   El intervalo búscado es la recta azul $\left(-\infty,\frac{3}{13}\right]$, donde la recta verde (gráfica de $4x$) está por arriba de la recta roja (gráfica de $\left|\frac{x}{3}-1\right|$).$\blacksquare$

4. Determinar el intervalo donde se cumple la desigualdad: $x^2-4x-\frac{9}{4}\leq 0$.

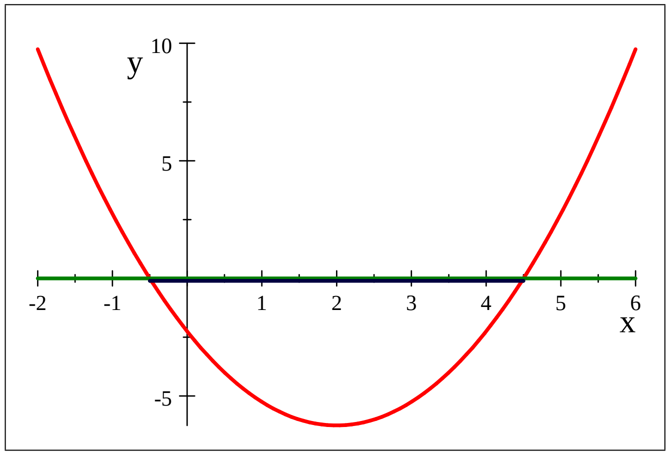
   RESPUESTA.

   Se procede a calcular las raices de la función cuadratica: $f(x)=ax^2+bx+c$. En este caso: $a=1,b=-4,c=-\frac{9}{4}$.

Se calcula el discriminante.
$d=b^2-4ac$.
Sustituyendo los valores de a,b,c se tiene
$d=(-4)^2-4(1)\left(-\frac{9}{4}\right)=25$.
Como $25\geq 0$, se procede a calcular las raíces.
$s_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $s_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Sustituyendo los valores de a,b,c se tiene
$s_1=\frac{-(-4)+\sqrt{25}}{2}=\frac{9}{2}$
$s_2=\frac{4-5}{2}.=-\frac{1}{2}$.
La función cuadratica del problema $f(x)=x^2-4x-\frac{9}{4}$ abre hacia arriba, por lo que debe ser menor igual a cero en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]$.

Verificación.

Se hace un bosquejo de la gráfica de $x^2 - 4x - \frac{9}{4}$.



El intervalo búscado es la recta azul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$, donde la recta verde (gráfica de $y = 0$) está por arriba de la curva roja (gráfica de $x^2 - 4x - \frac{9}{4}$).■