Clase: viernes 30 de enero de 2015.

En esta clase se presentan métodos para resolver desigualdades del tipo:

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{cx+d} &\leq 0, \\ |ax+b| &\leq k \text{ y} \\ |ax+b| &\geq k. \end{aligned}$$

Desigualdad: $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$.

Este tipo de desigualdad se cumple cuando uno de los factores es positivo y el otro negativo, además se pide que el denominador no sea cero.

1. Se tienen que resolver dos desigualdades, a) cuando $ax+b \geq 0$ y $cx+d < 0$ y b) cuando $ax+b \leq 0$ y $cx+d > 0$.

   En el caso a) se obtienen dos desigualdades para x (despejandola): $ax \geq -b$ y $cx < -d$, cuya intersección es la solución. En forma similar para el caso b) se obtienen dos desigualdades para x (despejandola): $ax \leq -b$ y $cx > -d$, cuya intersección es la solución. La unión de los intervalos de los casos a) y b) es el intervalo búscado.

   Ejemplo:

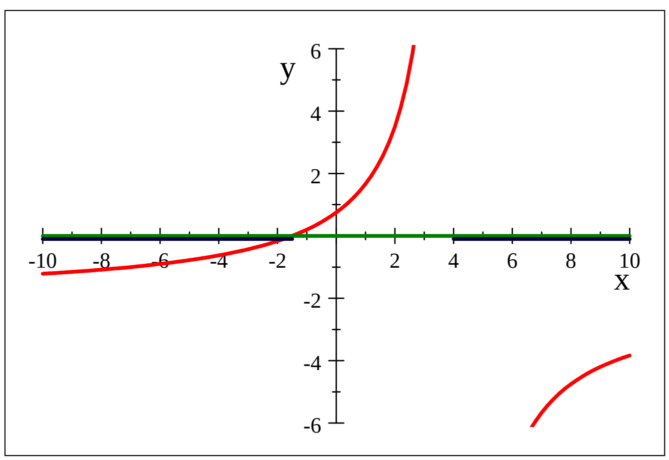
   Encontrar el intervalo donde se cumple la desigualda:$\frac{2x+3}{-x+4} \leq 0$.

   Caso a) $2x+3 \geq 0$ y $-x+4 < 0$. Se tiene $x \geq \frac{-3}{2}$ y $4 < x$, de donde se obtiene la relación de sus intervalos: $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right) \cap (4, \infty) = (4, \infty)$.

   Caso b) $2x+3 \leq 0$ y $-x+4 > 0$. Se tiene $x \leq \frac{-3}{2}$ y $4 > x$, de donde se obtiene la relación de sus intervalos: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cap (-\infty, 4) = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

   El intervalo búscado se obtiene de $(4, \infty) \cup \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

   Verificación por medio de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+3}{-x+4}, x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.



El intervalo búscado son las rectas en azul $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup (4, \infty)$, donde la recta verde (gráfica de $y = 0$) está por arriba de la gráfica de $\frac{2x+3}{-x+4}$ en rojo.■

Desigualdad $|ax+b| \leq k$.

Este tipo de desigualdad para los x de $|ax+b|$ que son menores o iguales (están por debajo) del valor k.

La función valor absoluto $|ax+b|$ se forma de dos rectas que abren hacia el lado positivo del eje vertical y que se obtienen dos casos:

a) $ax+b \geq 0$, de donde despejando x se obtiene: $ax \geq -b$.

b) $ax+b<0$, se tiene entonces $-(ax+b)>0$ de donde despejando x se obtiene: $-b>ax$.

Ejemplo.

Determinar el intervalo donde se cumple la desigualdad $\left|\frac{x}{3}-1\right|\leq 4$.

Como se trata de un valor absoluto se tienen dos casos:

a) $\frac{x}{3}-1\geq 0$, de donde despejando x se obtiene:$x\geq 3$.

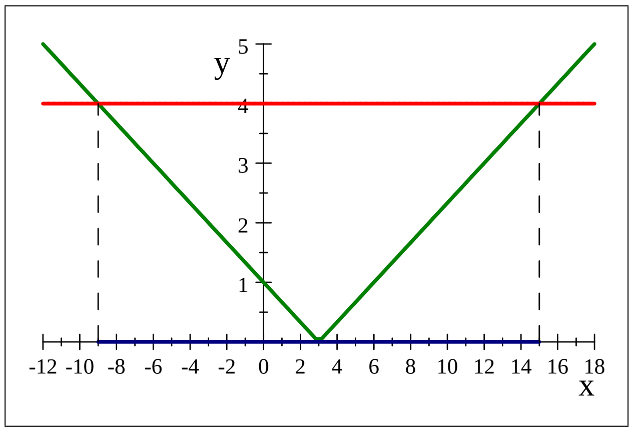
b) $\frac{x}{3}-1<0$, se tiene entonces $-\left(\frac{x}{3}-1\right)>0$. Se obtiene:$-\frac{x}{3}+1>0$.Despejando x se tiene: $3>x$.

Del caso a) se obtiene la recta $\frac{x}{3}-1$ con dominio $[3,\infty)$. Se calcula el punto de intersección con la recta $y=4$. Se tiene $\frac{x}{3}-1=4$, de donde $x=15$.

Del caso b) se obtiene la recta $-\frac{x}{3}+1$ con dominio $(-\infty,3)$. Se calcula el punto de intersección con la recta $y=4$. Se tiene $-\frac{x}{3}+1=4$, de donde $x=-9$.

Por tanto el intervalo búscado es $[-9,15]$.

1. Verificación por medio de la gráfica de las funciones $\left|\frac{x}{3}-1\right|$y $y=4$.



El intervalo búscado es la recta azul $[-9,15]$, donde las rectas verdes (gráfica de $\left|\frac{x}{3}-1\right|$) están por abajo de la recta roja (gráfica de $y=4$).■

Desigualdad $|ax+b|\geq k$.

Este tipo de desigualdad para los x de $|ax+b|$ que son mayores o iguales (están por arriba) del valor k.

La función valor absoluto $|ax+b|$ se forma de dos rectas que abren hacia el lado positivo del eje vertical y que se obtienen dos casos, como en caso anterior:

a) $ax+b\geq 0$, de donde despejando x se obtiene: $ax\geq -b$.

b) $ax+b<0$, se tiene entonces $-(ax+b)>0$ de donde despejando x se obtiene: $-b>ax$.

Note que en este caso la solución es en los extremos de $|ax+b|$ para valores mayores o iguales al valor k.

Ejemplo.

Determinar el intervalo donde se cumple la desigualdad $|2x-3|\geq 1$.

Como se trata de un valor absoluto se tienen dos casos:

a) $2x-3\geq 0$, de donde despejando x se obtiene:$x\geq\frac{3}{2}$.

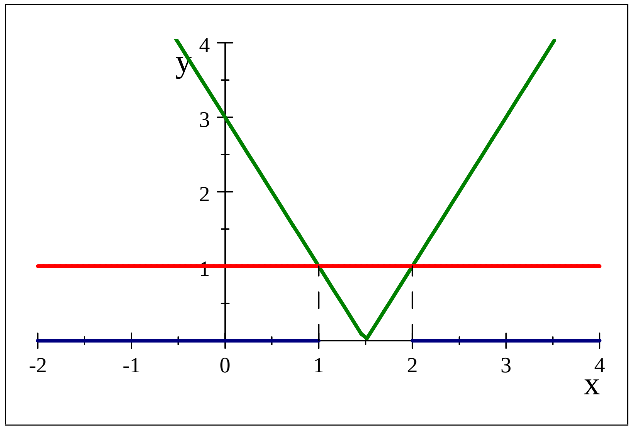
b) $2x-3<0$, se tiene entonces $-(2x-3)>0$. Se obtiene:$-2x+3>0$.Despejando x se tiene: $\frac{3}{2}>x$.

Del caso a) se obtiene la recta $2x-3$ con dominio $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$. Se calcula el punto de intersección con la recta $y=1$. Se tiene $2x-3=1$, de donde $x=2$.

Del caso b) se obtiene la recta $-2x+3$ con dominio $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$. Se calcula el punto de intersección con la recta $y=1$. Se tiene $-2x+3=1$, de donde $x=1$.

Por tanto el intervalo búscado es $(-\infty,1]\cup[2,\infty)$.

1. Verificación por medio de la gráfica de las funciones $|2x-3|$y $y=1$.



El intervalo búscado son las rectas en azul $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$, donde las rectas verdes (gráfica de $|2x-3|$) están por arriba de la recta roja (gráfica de $y=1$).$\blacksquare$