Chapter 1

Fundamentos de Lógica de Predicados

Profesor. Carlos Barrón Romero

Los temas de Lógica tiene como objetivo:
1. Comprender los principios básicos de la lógica de predicados.
Repaso.
Proposiciones, representación funcional y operadores lógicos: $\rightarrow$ (si-entonces), $\wedge$ (y lógico), $\vee$ (o lógico), $\neg$ (no o negación).
Predicados, representación funcional, operadores lógicos y cuantificadores.
Tabla de verdad.

1.1 Esquemas de la Lógica de enunciados o proposiciones

El esquema o diagrama consta de dos partes, separadas por una raya $\frac{\text{Suposición}}{\text{Dedución}}$.

Los esquemas clásicos de inferencia.

Modus Ponendo Ponens $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$. Doble Negación $\dfrac{p}{\neg\neg p}$ $\dfrac{\neg\neg p}{p}$.

Modus Tollendo Tollens $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$. Regla de Adjunción $\dfrac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$.

Regla de Disjunción $\dfrac{p \wedge q}{p}$, $\dfrac{p \wedge q}{q}$.

Modus Tollendo Ponens $\dfrac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$ $\dfrac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p}$. Silogismo hipotético: $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$.

1.2 Cálculo de predicados

Ley de Ejemplificación Universal (EU) $\dfrac{\forall x, p\,(x)}{p\,(a)}$.

Dada un predicado universal, se obtiene una instancia o ejemplo de este. Note que x: representa un caso indeterminado, mientras que a: es un sustantivo, sujeto, cosa, objeto, o algo concreto en particular al cual se le aplica el predicado p arbitrario.

Ejemplo:

A. Todas las estrellas brillan con luz propia

B. Sirio es una estrella.

Luego:

Sirio brilla con luz propia.

Convenciones:

e: estrella, b: brilla con luz propia, s: sirio

A: $\forall x, e(x) \rightarrow b(x)$.
B: $e(s)$.
Con A, B y EU se obtiene un caso particular.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{A: } \forall x, e(x) \rightarrow b(x). \\ \text{B: } e(s).\end{array}}{\text{C: } e(s) \rightarrow b(s).}$$

Se obtiene una instancia del enunciado de A.
Con B, C y Modus Ponendo Ponens:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{C:} e(s) \rightarrow b(s). \\ \text{B: } e(s).\end{array}}{\text{D: } b(s).}$$

Luego entonces: $b(s)$, o sea, Sirio brilla con luz propia.

Ley de Generalización Universal (GU) $\frac{p(a)}{\forall x, p(x)}$.

Dada un enunciado acerca de un a: es un sustantivo, sujeto, cosa, objeto, o algo concreto, arbitrario en el sentido que puede ser cualquiera, se obtiene un predicado universal.

Ejemplo.
A: Ningún reptil tiene sangre caliente.
B: Todas las víboras son reptiles.
Luego.
Ninguna víbora tiene sangre caliente.
Convenciones:
r: reptil, s: sangre caliente y v: víbora.
A: $\forall x, r(x) \rightarrow \rceil s(x)$.
B: $\forall x, v(x) \rightarrow r(x)$.
Con A, B y EU para a cualquiera:
C: $r(a) \rightarrow \rceil s(a)$.
D: $v(a) \rightarrow r(a)$.
Con D, C y el Silogismo hipotético:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{D: } v(a) \rightarrow r(a). \\ \text{C: } r(a) \rightarrow \rceil s(a).\end{array}}{\text{E: } v(a) \rightarrow \rceil s(a).}$$

Con E y dado que a es arbitrario, por GU, se tiene
F: $\forall x, v(x) \to \rceil s(x)$.
Luego entonces: $\forall x, v(x) \to \rceil s(x)$, o sea, ninguna víbora tiene sangre caliente.

Ley de Ejemplificación Existencial (EE) $\dfrac{\exists x, p(x)}{p(a)}$.

Dada un predicado existencial que supone que existe un x que cumple tal predicado, se obtiene un enunciado para un a: sustantivo, sujeto, cosa, objeto, o algo concreto.

Ejemplo:
A: Todos los dictadores son ególatras.
B: Algunos dictadores son generales.
Luego:
Algún general es ególatra.
Convenciones:
d: dictadores, e: ególatra y g: general.
A: $\forall x, d(x) \to e(x)$.
B: $\exists x, d(x) \wedge g(x)$.
Con A y EU:
$$\frac{\text{A: } \forall x, d(x) \to e(x).}{\text{C: } d(a) \to e(a).}$$
Con B y EE:
$$\frac{\text{B: } \exists x, d(x) \wedge g(x).}{\text{D: } d(a) \wedge g(a).}$$
Con D y la regla de disjunción:
$$\frac{\text{D: } d(a) \wedge g(a).}{\text{E: } d(a).}.$$
Con D y la regla de disjunción:
$$\frac{\text{D: } d(a) \wedge g(a).}{\text{F: } g(a).}$$
Con C, E y modus ponendo ponens:
$$\frac{\begin{array}{c}\text{C: } d(a) \to e(a). \\ \text{E: } d(a).\end{array}}{\text{G: } e(a).}$$
Con G y F y la regla de adjunción:
$$\frac{\begin{array}{c}\text{G:} e(a). \\ \text{F: } g(a).\end{array}}{\text{H: } e(a) \wedge g(a).}$$
Por conmutatividad:
$$\frac{\text{H: } e(a) \wedge g(a).}{\text{I: } g(a) \wedge e(a).}$$
Luego entonces $g(a) \wedge e(a)$, o sea, un general es ególatra.

Ley de Generalización Existencial (GE) $\dfrac{p(a)}{\exists x, p(x)}$.

Dada un enunciado para un a: sustantivo, sujeto, cosa, objeto, o algo concreto,.arbitrario, entonces se tiene un predicado existencial.

Ejemplo:
A: Todos los dictadores son ególatras.

B: Algunos dictadores son generales.
Luego:
Algún general es ególatra.
Con las mismas convenciones del ejemplo anterior, obtuvimos:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{A: } \forall x, d(x) \to e(x)\,. \\ \text{B: } \exists x, d(x) \wedge g(x)\,.\end{array}}{\text{I: } g(a) \wedge e(a)}\cdots$$

De I y GE se tiene:
H: $\exists x, g(x) \wedge e(x)$.
Luego entonces $\exists x, g(x) \wedge e(x)$, o sea, existe un general es ególatra.

1.3 Ejemplos de preguntas de examen.

1. Dados estos enunciados:

   (a) Héctor es hermano de Juan.

   (b) Héctor es padre de Mario.

   (c) Mario es hermano de Juan.

   Traducir los enunciados a Prolog. Explicar de que forma obtiene con sus enunciados del inciso anterior en Prolog a todos los que son hermanos.

2. Explicar si se puede o no inferir $p \wedge q$, dado $(p \wedge q) \vee \rceil r, t, t \to q, r$.

3. Traducir a la notación simbólica y demostrar o inferir (cuando sea posible) la conclusión de los siguientes predicados.

   (a) Ningún astronauta es miedoso.

   (b) Algunos científicos son astronautas.
   Luego
   Algunos científicos no son miedosos.

4. Traducir a la notación simbólica y demostrar o inferir (cuando sea posible) la conclusión de los siguientes predicados.

   (a) Ningún astronauta es miedoso.

   (b) Mario es astronauta.
   Luego
   Mario no es miedoso.

5. Traducir a la notación simbólica y demostrar o inferir (cuando sea posible) la conclusión de los siguientes predicados.

   (a) Todos los seres humanos son valientes.

   (b) Mario no es valiente.

   (c) María es humana.
   Luego
   Mario no es valiente y María es valiente.

6. Traducir a la notación simbólica y demostrar o inferir (cuando sea posible) la conclusión de los siguientes predicados.

   (a) Todo programa en lenguaje C con variables no declaradas entonces no compila.
   (b) Todo programa que no compila entonces no funciona.
   (c) El programa de Juan tiene variables no declaradas.
   Luego
   El programa de Juan no compila y no funciona.

7. Traducir a la notación simbólica y demostrar o inferir (cuando sea posible) la conclusión de los siguientes predicados.

   (a) Si el destino existe, entonces el hombre carece de libertad.
   (b) No es cierto que el hombre carece de libertad.
   Luego
   El destino no existe.