31 de mayo de 2018 1er. examen parcial de Cálculo Diferencial Profesor: Carlos Barrón Romero

Solución del examen

El valor de cada ejercicio aparece entre []. Se ajusta la calificación a 10, con los puntos de sus respuestas correctas por regla de tres.

1. Calcular la deriva de las funciones siguientes:

   (a) [0.5]
   $$f(x) = \left(-3x^4 + 3x\right)\sqrt{\frac{1}{x^2} - 3}$$
   RESPUESTA.
   $\left(\left(-3x^4+3x\right)\sqrt{\frac{1}{x^2}-3}\right)' = \left(-3x^4+3x\right)'\sqrt{\frac{1}{x^2}-3} + \left(-3x^4+3x\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-3}\right)' =$
   $\left(-12x^3+3\right)\sqrt{\frac{1}{x^2}-3} + \left(-3x^4+3x\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\frac{1}{x^3}\right) =$
   $\left(-12x^3+3\right)\sqrt{\frac{1}{x^2}-3} + \frac{3x^4-3x}{x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-3}}.$

   (b) [0.5]
   $$g(\theta) = \frac{\sin^2(\pi\theta)}{\sqrt{\pi^3}-2} + \cos\sqrt[3]{\pi\theta^2}$$
   RESPUESTA.
   $\left(\frac{\sin^2(\pi\theta)}{\sqrt{\pi^3}-2} + \cos\sqrt[3]{\pi\theta^2}\right)' = \left(\frac{\sin^2(\pi\theta)}{\sqrt{\pi^3}-2}\right) + \left(\cos\sqrt[3]{\pi\theta^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}-2}\left(\sin^2(\pi\theta)\right)' - \sin\sqrt[3]{\pi\theta^2}\left(\sqrt[3]{\pi\theta^2}\right)' =$
   $\frac{1}{\sqrt{\pi^3}-2}2\sin(\pi\theta)\cos(\pi\theta)\pi - \sin\sqrt[3]{\pi\theta^2}\sqrt[3]{\pi}\left(\theta^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^3}-2}\sin(\pi\theta)\cos(\pi\theta) - \sin\sqrt[3]{\pi\theta^2}\sqrt[3]{\pi}\frac{2}{3}\theta^{\frac{2}{3}-1} =$
   $\frac{2\pi}{\sqrt{\pi^3}-2}\sin(\pi\theta)\cos(\pi\theta) - \frac{2}{3}\sin\sqrt[3]{\pi\theta^2}\sqrt[3]{\frac{\pi}{\theta}}.$

   (c) [1.0]
   $$g(y) = \frac{\sin\left(\pi y^3\right)}{y^3}, h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$
   calcular $(g \circ h)'(x)$.
   RESPUESTA.
   $$(g \circ h)'(x) = (g(h(x)))' = \left(g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\right)' = \left(\frac{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3}\right)' = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)' = \left(x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' =$$
   $x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\pi(-1)\frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$

2. Suponiendo que el radio de una esfera $(\frac{4}{3}\pi r^3)$ crece siguiendo la ecuación
   $$r(t) = \frac{4}{3}\sqrt{t}.$$

   (a) [1.0] Calcular la tasa de cambio instantanea de volumen para $t = 9$.
   RESPUESTA.
   $V(r(t)) = V(\frac{4}{3}\sqrt{t}) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{4}{3}\sqrt{t}\right)^3 = \frac{4^4}{3^4}\pi t^{\frac{3}{2}}.$
   $V'(r(t)) = \frac{4^4}{3^4}\pi\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} = \frac{2^7}{3^3}\pi t^{\frac{1}{2}}.$
   En $t = 9, V'(9) = \frac{2^7}{3^3}\pi(9)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^7}{3^2}\pi \approx 44.680\,428\,85.$

   (b) [1.0] Calcular la aceleración del cambio de volumen para $t = 9$.
   RESPUESTA.
   $V''(t) = \left(\frac{2^7}{3^3}\pi t^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{2^7}{3^3}\pi\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{2^6}{3^3}\pi\frac{1}{\sqrt{t}}.$
   En $t = 9, V''(9) = \frac{2^6}{3^3}\pi\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{2^6}{3^4}\pi \approx 2.482\,246\,047.$

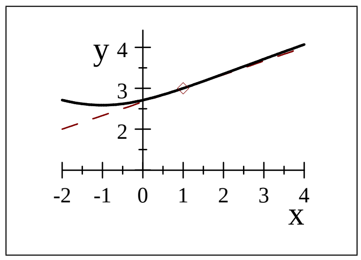
3. Dada la ecuación de curva:

$$(y-1)^3 = 4 + (x+1)^2 \,.$$

(a) [1.0] Calcular la derivada implicitamente.
RESPUESTA.
$\frac{d}{dx}(y-1)^3 = \frac{d}{dx}\left(4+(x+1)^2\right)$
$3(y-1)^2\frac{dy}{dx} = 2(x+1)$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+1)}{3(y-1)^2}.$$

(b) [1.0] Calcular la ecuación de la recta tangente de la curva en el punto del plano XY: $(1,3)$.
RESPUESTA.
$\frac{dy}{dx}|_{(1,3)} = \frac{2(1+1)}{3(3-1)^2} = \frac{4}{3(4)} = \frac{1}{3}$.
$\frac{y-3}{x-1} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}(x-1)+3$. La ecuación de la tangente es $y = \frac{x}{3}+\frac{8}{3}$.



4. A un cilindro apoyado sobre su circunsferencia se le inyecta agua a razón constante de $3m^3/s$ (metros cúbicos por segundo) por un orificio en el fondo de su base. El volumen del cilindro es $\pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura, ambos en metros (m). La altura y el radio del cilindro, están relacionados de forma que la altura es dos veces el radio $(h = 2r)$.

(a) [1.0] Determinar la función de la tasa de cambio de la altura respecto al tiempo.
RESPUESTA.
$V(r,h) = \pi r^2 h$, como $r = \frac{h}{2}$, se tiene $V(h) = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4}h^3$.
$\frac{d}{dt}V(h(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{4}h^3\right) = \frac{3\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$. De donde $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{3\pi}\frac{1}{h^2}\frac{dV}{dt}$.

(b) [1.0] Calcular la tasa de cambio cuando $t = 5$ segundos y $h = 1$ metro.
RESPUESTA.
Con $h = 1$ y $\frac{dV}{dt}|_{t=5,h=1} = 3m^3/s$.
Sustituyendo se tiene que $\frac{dh}{dt}|_{t=5,h=1} = \frac{4}{3\pi}\frac{1}{(1)^2}\frac{dV}{dt}|_{t=5,h=1} = \frac{4}{3\pi}3 = \frac{4}{\pi}m/s \approx 1.273\,239\,545\frac{m}{s}$.
RESPUESTA.
Con $h = \frac{1}{2}$ y $\frac{dV}{dt}|_{t=5,h=\frac{1}{2}} = 3m^3/s$.
Sustituyendo se tiene que $\frac{dh}{dt}|_{t=5,h=\frac{1}{2}} = \frac{4}{3\pi}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\frac{dV}{dt}|_{t=5,h=\frac{1}{2}} = \frac{16}{3\pi}3 = \frac{16}{\pi}m/s \approx 5.092\,958\,179\frac{m}{s}$.