21 de junio de 2018  2do. Examen Parcial de Cálculo Diferencial        Profesor: Carlos Barrón Romero

SOLUCION

El valor de cada ejercicio aparece entre []. Se ajusta la calificación a 10, con los puntos de sus respuestas correctas por regla de tres. Para considerar sus respuestas, debe escribir los argumentos, procedimientos o desarrollos que las justifican.

1. [1.5] Dada la función en el intervalo $\left[-\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right]$:

$$f(x) = 4x^4 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$$

Determine los valores extremos locales y absolutos.

RESPUESTA:

Simplificando $f(x) = 4x^2 - 4x^4$. Por tanto es una función continua en el intervalo cerrado dado, $\left[-\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right]$.

Primera derivada. $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^2 - 4x^4\right) = 8x - 16x^3$.

Segunda derivada. $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(8x - 16x^3\right) = 8 - 48x^2$.

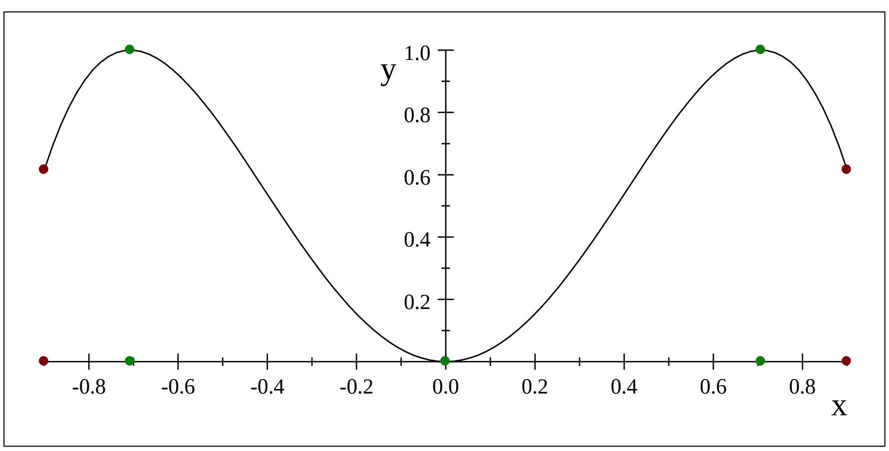
Se calculan puntos críticos de resolver: $f'(x) = 0$, o sea $8x - 16x^3 = 0$, $8x(1 - 2x^2) = 0$. Las raíces son $-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, \sqrt{\frac{1}{2}}$.

En $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 8 - 48\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 8 - 24 = -16 < 0$, $f$ tiene un máximo local.

En $x_1 = 0$, $f''(0) = 8 - 48(0)^2 = 8 > 0$, $f$ tiene un mínimo local.

En $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 8 - 48\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 8 - 24 = -16 < 0$, $f$ tiene un máximo local.

Un esbozo de la función en el intervalo $[-0.9, 0.9]$



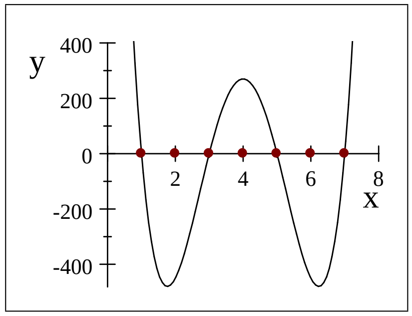

confirma que los puntos críticos además corresponden con extremos globales de $f$:

En $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 8 - 48\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 8 - 24 = -16 < 0$, se tiene un máximo global.

En $x_1 = 0$, $f''(0) = 8 - 48(0)^2 = 8 > 0$, se tiene un mínimo global.

En $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 8 - 48\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 8 - 24 = -16 < 0$, se tiene un máximo global.

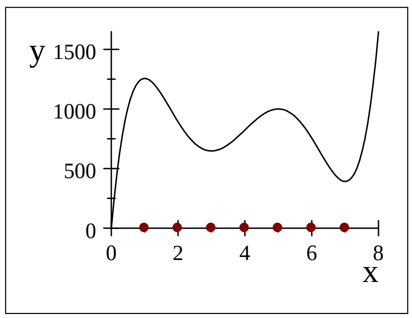
2. [2.0] Considerando el bosquejo de $h'(x)$, que se muestra a continuación




determinar con los puntos 1,2,3,4,5,6 y 7 para la función $h(x)$: (a) Intervalos de monotonía. (b) Intervalos de concavidad.

RESPUESTA.

Un esbozo de $h$ es




En $x = 1$ hay un máximo local, la derivada cambia de $+$ a $-$; en $x = 2$ hay un punto de inflexión; $x = 3$ hay un mínimo local, la derivada cambia de $-$ a $+$; en $x = 4$ hay un punto de inflexión; $x = 5$ hay un máximo local, la derivada cambia de $+$ a $-$; en $x = 6$ hay un punto de inflexión; $x = 7$ hay un mínimo local, la derivada cambia de $-$ a $+$.

(a) Intervalos de monotonía: $h$ es creciente de $(0, 1)$, $h$ es decreciente de $(1, 3)$, $h$ es creciente de $(3, 5)$, $h$ es decreciente de $(5, 7)$ y finalmente $h$ es creciente de $(7, 8)$.

(b) Intervalos de concavidad: $h$ es concava hacia abajo o convexa de $(0, 2)$, $h$ es concava hacia arriba de $(2, 4)$, $h$ es concava hacia abajo o convexa de $(4, 6)$ y finalmente, $h$ es concava hacia arriba de $(6, 8)$.

3. [2.5] Dada la función:

$$g(x) = \frac{-x^4 + 18x^2 - 9}{x - 1}$$

Determinar por la primera y segunda derivada: (a) Puntos críticos y su clasificación. (b) Puntos de inflexión (c) Intervalos de monotonía. (d) Intervalos de concavidad.

Determinar (e) el dominio, (f) realizar un bosquejo de la gráfica y (g) determinar y graficar las asíntotas.

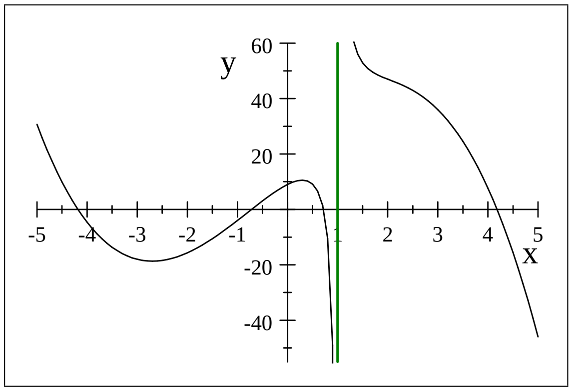
RESPUESTA.

Como $\lim_{x \to 1^-} \frac{-x^4+18x^2-9}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x \to 1^+} \frac{-x^4+18x^2-9}{x-1} = \infty$, la función es discontinua en $x = 1$.

(e) El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(g) La función tiene una asíntota vertical en $x = 1$. Se muestra en verde en la siguiente gráfica.

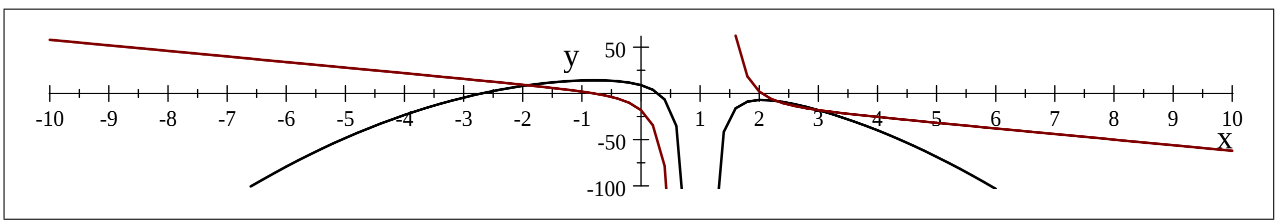
(f) Un bosquejo de la gráfica de $g$ es



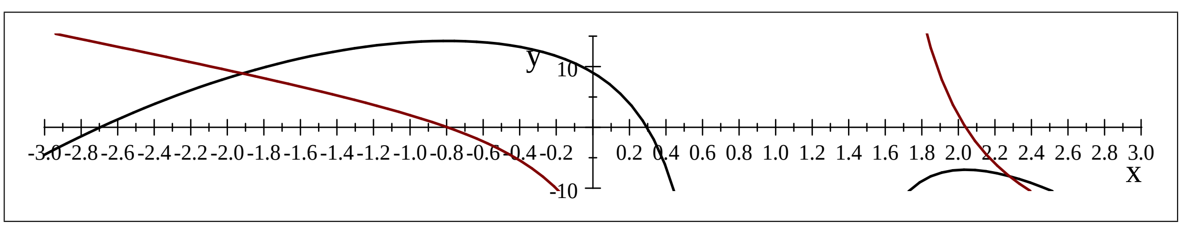

Primera derivada. $g'(x) = \frac{d}{dx}\frac{-x^4+18x^2-9}{x-1} = \frac{(x-1)\left(-x^4+18x^2-9\right)' - \left(-x^4+18x^2-9\right)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)\left(-4x^3+36x\right) - \left(-x^4+18x^2-9\right)}{(x-1)^2} = \frac{-4x^4+36x^2+4x^3-36x+x^4-18x^2+9}{(x-1)^2} = \frac{-3x^4+4x^3+18x^2-36x+9}{(x-1)^2}$.

Segunda derivada. $g''(x) = \frac{d}{dx}\frac{-3x^4+4x^3+18x^2-36x+9}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2\left(-3x^4+4x^3+18x^2-36x+9\right)' - \left(-3x^4+4x^3+18x^2-36x+9\right)\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^2\left(-12x^3+12x^2+36x-36\right) - \left(-3x^4+4x^3+18x^2-36x+9\right)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\left[(x-1)\left(-12x^3+12x^2+36x-36\right) - 2\left(-3x^4+4x^3+18x^2-36x+9\right)\right]}{(x-1)^4} = \frac{\left[(x-1)\left(-12x^3+12x^2+36x-36\right) - 2\left(-3x^4+4x^3+18x^2-36x+9\right)\right]}{(x-1)^3} = \frac{-12x^4+12x^3+36x^2-36x+12x^3-12x^2-36x+36+6x^4-8x^3-36x^2+72x-18}{(x-1)^3} = \frac{-6x^4+16x^3-12x^2+18}{(x-1)^3} = -\frac{2}{(x-1)^3}\left(3x^4-8x^3+6x^2-9\right)$.

Las soluciones algebraicas por factorización no son posibles. Usaremos el método gráfico a partir de los esbozos de la primera y segunda derivadas de $g$.




Enfocamos la región donde están los puntos crítcos y de inflexión.




(a) Los puntos críticos donde $g'(x) = 0$ son aproximadamente $x_0 = -2.7$ y $x_1 = 0.3$.

(b) Los puntos de inflexión donde $g''(x) = 0$ son aproximadamente $x_2 = -0.8$ y $x_3 = 2.03$.

(c) Intervalos de monotonía de $g$: es decreciente en $(-\infty, -2.7)$, es creciente en $(-2.7, 0.3)$, es decreciente en $(0.3, 1)$ y es decreciente en $(1, \infty)$ .

(d) Intervalos de concavidad de $g$: es concava hacia arriba en $(-\infty, -0.8)$, es concava hacia abajo en $(-0.8, 1)$, es concava hacia arriba en $(1, 2.03)$ y es concava hacia abajo en $(2.03, \infty)$.

4. [2.0] Determinar las dimensiones de un terreno rectangular que se tiene que rodear con 100 metros de cerca para que su área sea máxima. Justificar que se trata de un área máxima.

   RESPUESTA.

   La fórmula del área de un terreno rectangular es $A(x, y) = xy$.

   La fórmula del perímetro de un terreno rectangular es $P(x, y) = 2\,(x + y)$. Los datos indican que $2\,(x + y) = 100$.

   Por tanto $x + y = 50$. Despejando $y = 50 - x$.

   Sustituyendo $y$ en la fórmula del área $A(x) = x\,(50 - x) = 50x - x^2$. La fórmula corresponde con una función concava hacia abajo, por lo tanto tiene un extremo máximo. O bien, como $A''(x) = -2 < 0$, la función tiene un máximo.

   La primera derivada $A'(x) = \frac{d}{dx}50x - x^2 = 50 - 2x$.

   Haciendo $A'(x) = 0$, $50 - 2x = 0$. Se tiene el punto crítico $x = 25$.

   El área es $(25)^2 = 625$ y las dimensiones son $x = 25$ y $y = 25$.