UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – AZCAPOTZALCO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
3^er Examen de Cálculo Diferencial   Profr. Carlos Barrón Romero   Trimestre 18P

SOLUCION

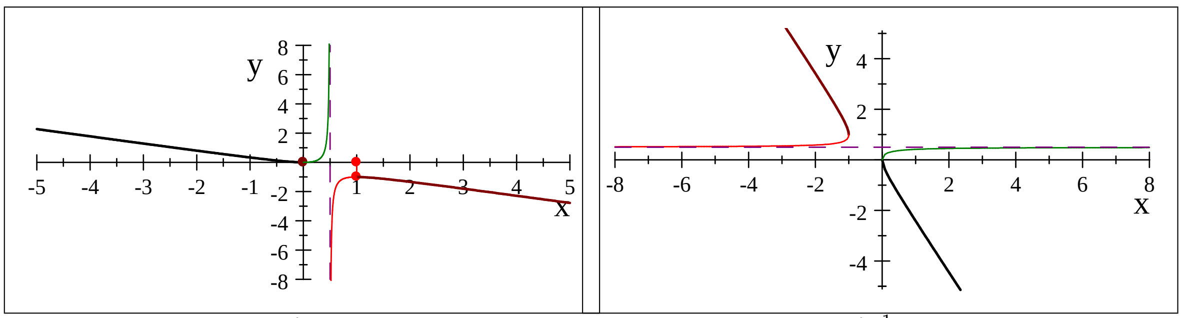
Nota: El examen consta de 4 problemas cuyo puntaje aparece entre paréntesis. **Todas las respuestas deben ser justificadas y mostrar el procedimiento utilizado.**

1. (3.0) Considere la función

$$f(x) = \frac{4x^2}{-8x+4}$$

Determinar:

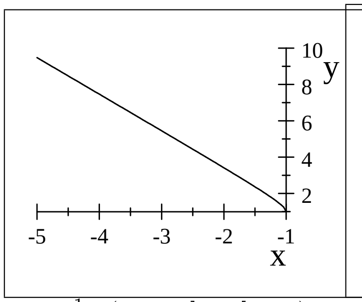
(a) Una inversa de la función.
RESPUESTA.

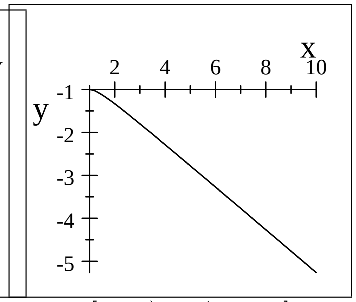


f f^{-1}

Primero se determinan los puntos críticos de f para encontrar los intevalos de monotonía:
$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x^2}{-8x+4} = -2\frac{x}{(2x-1)^2}(x-1)$. Son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.
En $(-\infty, 0]$, f es decreciente.
En $[0, \frac{1}{2})$, f es creciente.
En $(\frac{1}{2}, 1]$, f es creciente.
En $[1, \infty)$, f es decreciente.
La función es invertible en los cuatro intervalos porque es monótona en cada uno de ellos.
Sea $y = \frac{4x^2}{-8x+4}$. Se tiene $4x^2 + 8yx - 4y = 0$, Las dos soluciones son $x_1 = -y + \sqrt{y(y+1)}$ y $x_2 = -y - \sqrt{y(y+1)}$.
Con la restricción de que $y(y+1) \geq 0$. Se tiene que $y \leq -1$ o $y \geq 0$.

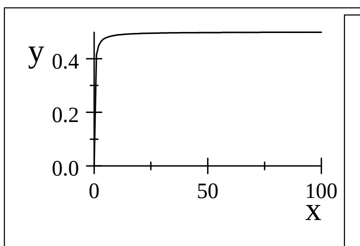
(b) El dominio y rango de su función inversa.
RESPUESTA.
Tomando el dominio $[-1, -\infty)$ y $f^{-1}(x) = -x + \sqrt{x(x+1)}$. El rango es $[1, \infty)$.
Que corresponde con f con dominio $[1, \infty)$ y rango $[-1, -\infty)$.
$f(10) = -\frac{100}{19} = -5.263\,157\,895$
$f(5) = -\frac{25}{9}, f(4) = -\frac{16}{7}, f(3) = -\frac{9}{5}, f(2) = -\frac{4}{3}, f(1) = -1$
$h(x) = -x + \sqrt{x(x+1)}$ ya que
$h(-\frac{100}{19}) = 10, h(-\frac{25}{9}) = 5, h(-\frac{16}{7}) = 4, h(-\frac{9}{5}) = 3, h(-\frac{4}{3}) = 2, h(-1) = 1$

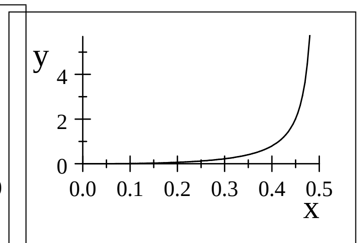




$f^{-1}:(-\infty,0]\to[0,\infty)$ $\qquad f:[0,\infty)\to(-\infty,0]$

Tomando el dominio $[0,\infty)$ y $f^{-1}(x)=-x+\sqrt{x(x+1)}$.
Notemos su rango es $[0,\frac{1}{2})$.
f^{-1} es creciente y $\lim_{x\to\infty}\left(-x+\sqrt{x^2+x}\right)=$
$\lim_{x\to\infty}\left(\left(-x+\sqrt{x^2+x}\right)\frac{-x-\sqrt{x^2+x}}{-x-\sqrt{x^2+x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{-x-\sqrt{x^2+x}}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=$
$\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{-1}{-1-\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$. Tiene una asíntota horrizontal $y=\frac{1}{2}$.





$f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\frac{1}{2})$ $\qquad f:[0,\frac{1}{2})\to[0,\infty)$

ETC.

(c) La derivada de su función inversa.
RESPUESTA.
$\frac{d}{dx}\left(-x+\sqrt{x(x+1)}\right)=\frac{1}{2x}\frac{\sqrt{x(x+1)}}{x+1}\left(2x-2\sqrt{x(x+1)}+1\right)$.
$\frac{d}{dx}\left(-x-\sqrt{x(x+1)}\right).=-\frac{1}{2x}\frac{\sqrt{x(x+1)}}{x+1}\left(2x+2\sqrt{x(x+1)}+1\right)$.

2. (2.0) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a)

$$f(x)=\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]^{\left(\pi x^3\right)}.$$

RESPUESTA.
$\left[\ln\left(f(x)\right)\right]'=\left[\ln\left(\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]^{\left(\pi x^3\right)}\right)\right]'$
$\frac{1}{f(x)}f'(x)=\left[\left(\pi x^3\right)\ln\left(\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]\right)\right]'=\left[\pi x^3\right]'\ln\left(\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]\right)+\left(\pi x^3\right)\left[\ln\left(\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]\right)\right]'=$
$\pi 3x^2\ln\left(\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]\right)+\left(\pi x^3\right)\frac{1}{\arccos(x^2+2x)}\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]'=$
$\pi 3x^2\ln\left(\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]\right)+\left(\pi x^3\right)\frac{1}{\arccos(x^2+2x)}\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+2x)^2}}\left[x^2+2x\right]'=$
$\pi 3x^2\ln\left(\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]\right)+\left(\pi x^3\right)\frac{1}{\arccos(x^2+2x)}\frac{2x+2}{\sqrt{1-(x^2+2x)^2}}$. Finalmente,
$f'(x)=\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]^{\left(\pi x^3\right)}\left(3\pi x^2\ln\left(\left[\arccos\left(x^2+2x\right)\right]\right)+\frac{2\pi x^4+2\pi x^3}{\arccos(x^2+2x)\sqrt{1-(x^2+2x)^2}}\right)$.

(b)
$$f(x)=\exp\left(\frac{\exp\left(\cos\left(2x^2\right)\right)}{4x}\right).$$

RESPUESTA.
$f'(x)=\left[\exp\left(\frac{\exp(\cos(2x^2))}{4x}\right)\right]'=\exp\left(\frac{\exp(\cos(2x^2))}{4x}\right)\left[\frac{\exp(\cos(2x^2))}{4x}\right]'=$
$\exp\left(\frac{\exp(\cos(2x^2))}{4x}\right)\left[\frac{1}{4}\exp\left(\cos\left(2x^2\right)\right)(x)^{-1}\right]'=$
$\frac{1}{4}\exp\left(\frac{\exp(\cos(2x^2))}{4x}\right)\left[\left[\exp\left(\cos\left(2x^2\right)\right)\right]'(x)^{-1}+\exp\left(\cos\left(2x^2\right)\right)\left[(x)^{-1}\right]'\right]=$
$\frac{1}{4}\exp\left(\frac{\exp(\cos(2x^2))}{4x}\right)\left[\exp\left(\cos\left(2x^2\right)\right)\left[\cos\left(2x^2\right)\right]'(x)^{-1}+\exp\left(\cos\left(2x^2\right)\right)\left(-x^{-2}\right)\right]=$
$\frac{1}{4}\exp\left(\frac{\exp(\cos(2x^2))}{4x}\right)\left[\exp\left(\cos\left(2x^2\right)\right)\left(-\sin\left(2x^2\right)\right)4x\,(x)^{-1}+\exp\left(\cos\left(2x^2\right)\right)\left(-x^{-2}\right)\right]=$
$\frac{1}{4}\exp\left(\frac{\exp(\cos(2x^2))}{4x}\right)\left[-4\exp\left(\cos\left(2x^2\right)\right)\sin\left(2x^2\right)-\frac{\exp(\cos(2x^2))}{x^2}\right].$

3. (2.0) Determinar por el polinomio de Taylor de grado 3 el valor de $\cos(63^\circ)$ alrededor de un punto apropiado.
RESPUESTA.
Como $\frac{\pi}{3}$ es a 60°, se elije esté punto $a=\frac{\pi}{3}$. Además por regla de tres: $x=\frac{\frac{\pi}{3}63}{60}=\frac{7}{20}\pi$.
Se tiene $(x-a)=\left(\frac{7}{20}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{60}\pi$
La primera, segunda y tercera derivada del coseno son:
$\frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin(x)$ y $\frac{d^2}{dx^2}\cos(x)=-\cos x$ y $\frac{d^3}{dx^3}\cos(x)=\sin x$.
Se evalua en el punto a :
$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ y $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
$\cos(63^\circ)\approx\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=$
$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1}\left(\frac{7}{20}\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\left(\frac{7}{20}\pi-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{6}\left(\frac{7}{20}\pi-\frac{\pi}{3}\right)^3=0.453\,990\,346$
$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{60}\pi\right)-\frac{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^3=$
$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{60}\pi\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^3=0.453\,990\,346$
El valor por calculadora es $\cos(63^\circ)=\cos\left(\frac{7}{20}\pi\right)\approx0.453\,990\,499\,7$

4. (3.0) Considere la función:
$$f(x)=\frac{x+4}{2\exp\left(\frac{1}{20}x^2\right)}.$$

Determinar

(a) Dominio y ceros.
RESPUESTA.
Domino de f es $\mathbb{R}$.
Ceros son de $x+4=0$. El único cero o raíz es $x=-4$.

(b) Ecuaciones de sus asíntotas.
RESPUESTA.
No tiene asintotas verticales.
De los límites laterales se tiene:
$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{2\exp\left(\frac{1}{20}x^2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2\left(\frac{1}{20}\right)(2x)\exp\left(\frac{1}{20}x^2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x\exp\left(\frac{1}{20}x^2\right)}=0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{2\exp\left(\frac{1}{20}x^2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\left(\frac{1}{20}\right)(2x)\exp\left(\frac{1}{20}x^2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x\exp\left(\frac{1}{20}x^2\right)} = 0$

Asíntota horizontal $y = 0$.

(c) Puntos críticos e identificar extremos locales o globales.

RESPUESTA.

$\frac{d}{dx}\frac{x+4}{2\exp\left(\frac{1}{20}x^2\right)} = -\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x^2}\left(x^2+4x-10\right)$

$x^2+4x-10=0$, puntos críticos:

$x_1 = -2-\sqrt{14} = -5.741\,657\,387$

$x_2 = -2+\sqrt{14} = 1.741\,657\,387$

$\frac{d^2}{dx^2}\frac{x+4}{2\exp\left(\frac{1}{20}x^2\right)} = \frac{1}{200}e^{-\frac{1}{20}x^2}\left(x^3+4x^2-30x-40\right)$

$h(x) = \frac{1}{200}e^{-\frac{1}{20}x^2}\left(x^3+4x^2-30x-40\right)$

$h(-2-\sqrt{14}) = 7.197\,849\,353\times 10^{-2} > 0$, x_1 es un punto mínimo.

$h(-2+\sqrt{14}) = -0.321\,510\,540\,4 < 0$, x_2 es un punto máximo.