4.4 Concavidad y trazado de curvas

Definición La gráfica de una función derivable $y = f(x)$ es

(a) concava hacia arriba en un intervalo abierto (a, b) si $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ es creciente en (a, b).

(b) concava hacia abajo (convexa) en un intervalo abierto (a, b) si $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ es decreciente en (a, b).

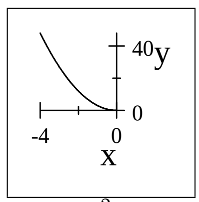
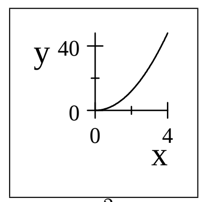
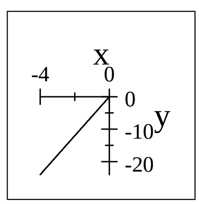
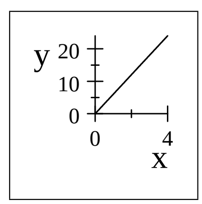
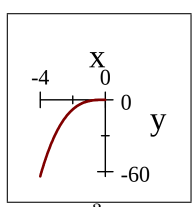
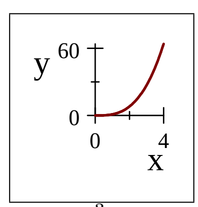
Criterio de la segunda derivada para concavidad

$$\begin{aligned}
\text{Sea } y &= f(x) \text{ dos veces derivable en el intervalo } I. \\
1.\ \text{Si } f'' &= \frac{d^2}{dx^2} f > 0 \text{ en } I, \text{ la gráfica de } f \text{ en } I \text{ es concava hacia arriba.} \\
2.\ \text{Si } f'' &= \frac{d^2}{dx^2} f < 0 \text{ en } I, \text{ la gráfica de } f \text{ en } I \text{ es convexa (concava hacia abajo).}
\end{aligned}$$

Ejemplo: $f(x) = x^3$

Derivada $f'(x) = 3x^2$

Segunda derivada: $f''(x) = 6x$

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Comportamiento de $f' = \frac{d}{dx} f$	decrece	crece
	 $3x^2$	 $3x^2$
signo de $f'' = \frac{d^2}{dx^2} f$	negativo	positivo
	 $6x$	 $6x$
Comportamiento de f	concava hacia abajo	concava hacia arriba
	 x^3	 x^3

Puntos de inflexión

Definición. Un punto donde la gráfica de una función cambia la concavidad de arriba a abajo o viceversa es un punto de inflexión.

En un punto de inflexión $(c, f(c)$ de la gráfica de f, se tiene $f''(c) = 0$ o no existe $f''(c)$.

Ejemplo 6.

Una particula se dezplaza a lo largo de una recta horizontal de coordenadas (positiva hacia la derecha) con la función de posición

$$s\left(t\right) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5,\ t \geq 0.$$

Determine la velocidad, la aceleración, y describa el movimiento de la partícula.

Respuesta.

Derivada: $\frac{d}{dt}s\left(t\right) = \frac{d}{dt}\left(2t^3 - 14t^2 + 22t - 5\right) = 6t^2 - 28t + 22$

La función de la velocidad es $v(t) = 6t^2 - 28t + 22.$

Segunda derivada: $\frac{d}{dt}s'\left(t\right) = \frac{d}{dt}\left(6t^2 - 28t + 22\right) = 12t - 28.$

La función de la aceleracion es $a(t) = 12t - 28.$

Determino los puntos críticos para describir el movimiento.

$s'\left(t\right) = 0, 6t^2 - 28t + 22 = 0, 6t^2 - 28t + 22,$

$x_1 = \frac{-(-28)+\sqrt{(-28)^2-4(6)(22)}}{2(6)},$

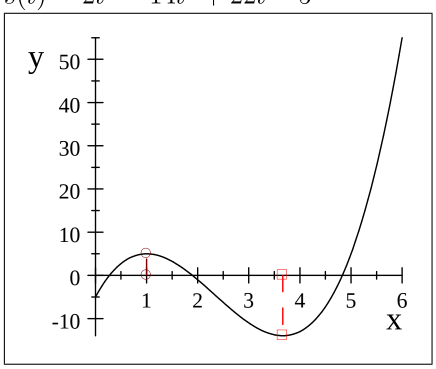
$\sqrt{\left(-28\right)^2 - 4\left(6\right)\left(22\right)} = \sqrt{784 - 528} = \sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$

$x_1 = \frac{28+16}{12} = \frac{11}{3}$

$x_2 = \frac{-(-28)-\sqrt{(-28)^2-4(6)(22)}}{2(6)} = \frac{28-16}{12} = 1.$

Esbozo de la gráfica

$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$



El movimiento de la partícula

En el intervalo de tiempo $[0, 1)$ la partícula se mueve hacia la derecha desde $s(0) = -5$ a $s(1) = 5$.

En $x_1 = 1, v(1) = 0$, la partícula se detiene.

En el intervalo de tiempo $[1, \frac{11}{3})$ la partícula se mueve a la izquierda de $s(1) = 5$ a $s(\frac{11}{3}) = -\frac{377}{27} \approx -13.963$.

En $x_2 = \frac{11}{3}, v(\frac{11}{3}) = 0$, la partícula se detiene.

En el intervalo de tiempo $[\frac{11}{3}, \infty)$ la partícula se mueve a la derecha de $s(\frac{11}{3}) = -\frac{377}{27}$ a infinito.