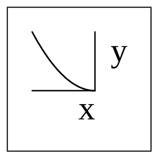
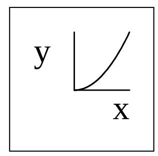
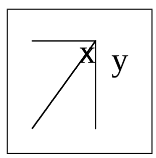
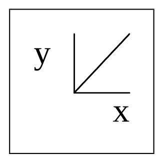
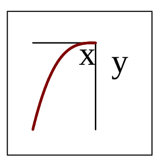
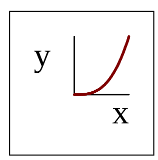
4.4 Concavidad y trazado de curvas

Definición La gráfica de una función derivable $y = f(x)$ es
(a) concava hacia arriba en un intervalo abierto (a, b) si $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ es creciente en (a, b).
(b) concava hacia abajo (convexa) en un intervalo abierto (a, b) si $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ es decreciente en (a, b).

Criterio de la segunda derivada para concavidad

$$\begin{aligned}
\text{Sea } y &= f(x) \text{ dos veces derivable en el intervalo } I. \\
\text{1. Si } f'' &= \frac{d^2}{dx^2} f > 0 \text{ en } I, \text{ la gráfica de } f \text{ en } I \text{ es concava hacia arriba.} \\
\text{2. Si } f'' &= \frac{d^2}{dx^2} f < 0 \text{ en } I, \text{ la gráfica de } f \text{ en } I \text{ es convexa (concava hacia abajo).}
\end{aligned}$$

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Comportamiento de $f' = \frac{d}{dx} f$	decrece	crece
		
signo de $f'' = \frac{d^2}{dx^2} f$	negativo	positivo
		
Comportamiento de f	concava hacia abajo	concava hacia arriba
		

Puntos de inflexión

Definición. Un punto donde la gráfica de una función tiene derivada y cambia la concavidad de arriba a abajo o viceversa es un punto de inflexión.

En un punto de inflexión $(c, f(c)$ de la gráfica de f, se tiene $f''(c) = 0$ o no existe $f''(c)$.

Teorema 5. Criterio de la segunda derivada para extremos locales

Suponga que f'' continua en un intevalo que contenga $x = c$.

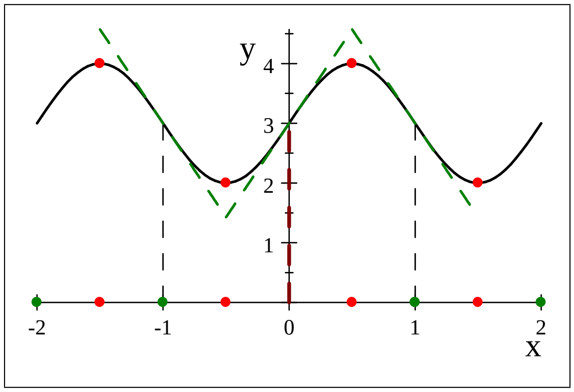
1. Si $f'(c) = 0$ y $f"(c) = \frac{d^2}{dx^2} f(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.

2. Si $f'(c) = 0$ y $f"(c) = \frac{d^2}{dx^2} f(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.

3. Si $f'(c) = 0$ y $f"(c) = \frac{d^2}{dx^2} f(c) = 0$, entonces la prueba no es concluyente. La función f puede tener un extremo local o no tenerlo en $x = c$.

Ejemplos. Caracterice los puntos de inflexión, es decir, describa como se comporta la primera, la segunda derivada respecto al cambio de curvatura. E identifique los intervalos de concavidad y convexidad.

$f_0\left(x\right) = \sin\left(\pi x\right) + 3$



Respuesta.

Los puntos de inflexión se obtienen de $f_0''(x) = 0$,

$\frac{d}{dx} f_0(x) = \pi \cos \pi x . \pi \cos\left(\pi(-1)\right) = -3.\,141\,592\,654$

$\frac{d^2}{dx^2} f_0(x) = -\pi^2 \sin \pi x$.

$\frac{d^2}{dx^2} f_0(x) = 0$, las soluciones en el intervalo $[-2, 2]$ son $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

En $x = -2$, $\frac{d}{dx} f_0(-2) \neq 0$ y $f''(-2) = 0$. Asi en -1,0,1,2.

En el intervalo $(-2, -1)$, hay punto extremo $x = -1.5$, f_0 tiene un máximo, concavidad hacia abajo y $f''(-1.5) < 0$.

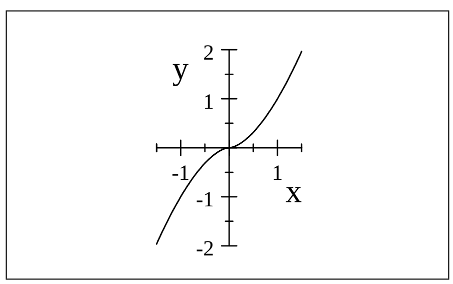
En el intervalo $(-1, 0)$, hay punto extremo $x = -0.5$, f_0 tiene un mínimo, concavidad hacia arriba y $f''(-0.5) > 0$.

En el intervalo $(0, 1)$, hay punto extremo $x = 0.5$, f_0 tiene máximo, concavidad hacia abajo y $f''(0.5) < 0$.

En el intervalo $(1, 2)$, hay punto extremo $x = 1.5$, f_0 tiene mínimo, concavidad hacia arriba y $f''(1.5) > 0$.

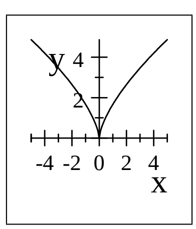
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

$f_1(x) = \sqrt[3]{x^5}$



Respuesta.

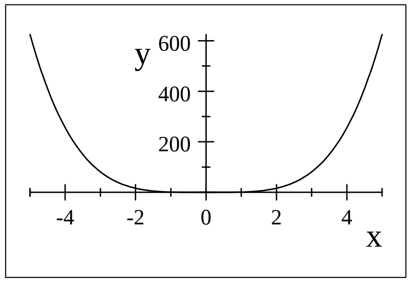
Primera deriva $\frac{d}{dx} \sqrt[3]{x^5} = \frac{5}{3x} \sqrt[3]{x^5} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}$



Segunda derivada $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{x^5} = \frac{10}{9x^2} \sqrt[3]{x^5} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. No existe la segunda derivada en $x = 0$ porque $\lim_{x \to 0^-} \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} = \infty$.

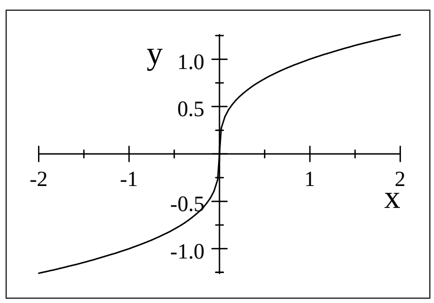
Entonces aplico el criterio de creciente y decreciente de la primera derivada.
Como $f_1'(x)$ decreciente en $(-\infty, 0)$, f es concava hacia abajo.
Como $f_1'(x)$ dcreciente en $(0, \infty)$, f es concava hacia arriba.
En $x = 0$ hay un cambio de concavidad, por tanto es un punto de inflexión.
%%

$f_2(x) = x^4$

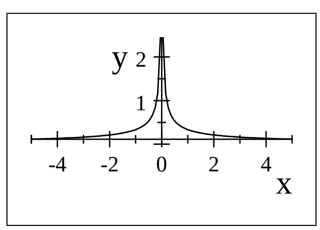


RESPUESTA.
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$.
La función f_2 es concava hacia arriba porque $f''(x) > 0$ para toda $x \neq 0$. Y además en $x = 0$ se tiene un mínimo local y global.
En $x = 0$ no hay un cambio de concavidad, no es un punto de inflexión, o sea, no cambia la curvatura.
%%

$f_3(x) = \sqrt[3]{x}$



RESPUESTA.
$f_3'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$



Entonces aplico el criterio de creciente y decreciente de la primera derivada.
Como $f_3'(x)$ creciente en $(-\infty, 0)$, f es concava hacia arriba.
Como $f_3'(x)$ decreciente en $(0, \infty)$, f es concava hacia abajo.
En $x = 0$ hay un cambio de concavidad, por lo tanto es un punto de inflexión.
%%