

#### 4.4 Concavidad y trazado de curvas

Ejemplos resueltos en clase martes 19 de junio de 2018.

Ejemplo 8. Identifique puntos extremos(1), intervalos de monotonía(2), intervalos de concavidad(3), ubique extremos locales(4), ubique extremos globales(5), puntos de inflexión(6), las intersecciones con los ejes(7), grafique las asíntotas(8) y haga un bosquejo de la gráfica(9).

$$f_5(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$

**RESPUESTA.**

Primera derivada

$$\frac{d}{dx} f_5(x) = \frac{d}{dx} \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = -2 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}.$$

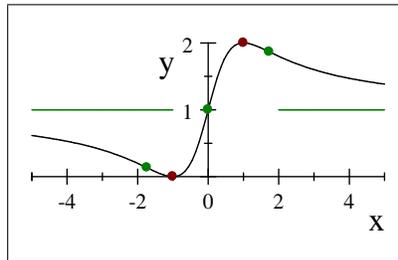
Puntos críticos. De  $\frac{d}{dx} f_5(x) = 0$ , se tiene  $x^2 - 1 = 0$ . Por tanto los puntos críticos son  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 1$ .

Segunda derivada.

$$\frac{d^2}{dx^2} f_5(x) = \frac{d}{dx} \left( -2 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \right) = 4 \frac{x}{(x^2+1)^3} (x^2 - 3).$$

Puntos de inflexión. De  $\frac{d^2}{dx^2} f_5(x) = 0$ , se tiene  $x(x^2 - 3) = 0$ , los puntos de inflexión son  $x_3 = -\sqrt{3}$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = \sqrt{3}$ .

(9) Bosquejo de la gráfica



(1) Identifique puntos extremos. Son los puntos  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 1$ .

(2) intervalos de monotonía.  $f_5$  es decreciente de  $(-\infty, -1)$ , es creciente de  $(-1, 1)$  y decreciente de  $(1, \infty)$ .

(3) intervalos de concavidad.  $f_5$  es concava hacia abajo de  $(-\infty, -\sqrt{3})$ , concava hacia arriba de  $(-\sqrt{3}, 0)$ , concava hacia abajo de  $(0, \sqrt{3})$  y concava hacia arriba de  $(\sqrt{3}, \infty)$ .

(4) ubique extremos locales.  $x_1 = -1$  es un mínimo local y  $x_2 = 1$  máximo local.

(5) ubique extremos globales.  $x_1 = -1$  es un mínimo global y  $x_2 = 1$  máximo global.

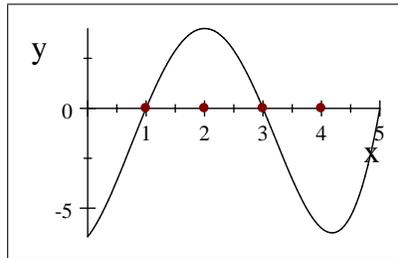
(6) puntos de inflexión. Son  $x_3 = -\sqrt{3}$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = \sqrt{3}$ .

(7) las intersecciones con los ejes. En el punto  $(0, 1)$  se toca al eje Y. En el punto  $(-1, 0)$  se toca al eje X.

(8) grafique las asíntotas. Las asíntotas corresponden a la recta  $y = 1$ . Porque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = 1$ .

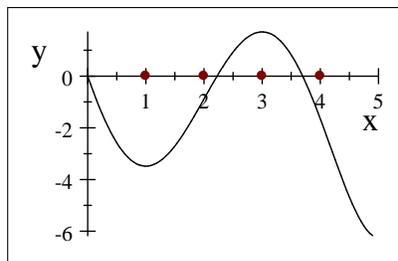
Global 15I-M. P2

1. Considerando el bosquejo de  $h'(x)$ , que se muestra a continuación, determinar con los puntos 1,2,3 y 4 para la función  $h(x)$  :



**RESPUESTA.**

Bosquejo de la función  $h$ .



- (a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento:  $h$  decrece en  $(0, 1)$ , crece en  $(1, 3)$ , decrece en  $(3, 5)$ .
- (b) Puntos críticos de primer orden y su clasificación:  $x = 1$  es mínimo local y  $x = 3$  es máximo local.
- (c) Puntos de inflexión. Los puntos de inflexión son  $x = 2$  y  $x = 4$ .
- (d) Intervalos de concavidad:  $h$  es concava hacia arriba en  $(0, 2)$ , concava hacia abajo en  $(2, 4)$ .