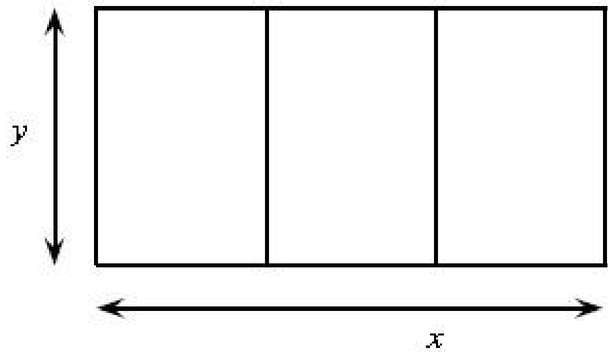
Ejemplos resueltos en clase.

1.Un terreno rectangular está cercado y dividido en 3 partes iguales con una cerca de alambre. El largo total de la cerca de alambre es de 300 mts. Determinar las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.



RESPUESTA.

El largo del cercado es $2x + 4y = 300$.

De donde $y = \frac{300-2x}{4} = 150 - \frac{1}{2}x$.

El area es $A = xy$. Sustituyendo y, se tiene $A(x) = x\left(150 - \frac{1}{2}x\right) = 150x - \frac{1}{2}x^2$.

Se trata de una parabola con concavidad hacia abajo, por eso tiene un máximo. O bien note que $A''(x) = -1 < 0$.

$A'(x) = 150 - x$. El punto critico se obtiene de $A'(x_0) = 0$. O sea $x_0 = 150$.

Sustituyendo en $y = 150 - \frac{1}{2}x$, $y = 150 - \frac{1}{2}150 = 75$.

El área máxima del terreno es $150(75) = 11,250\text{mts}^2$.

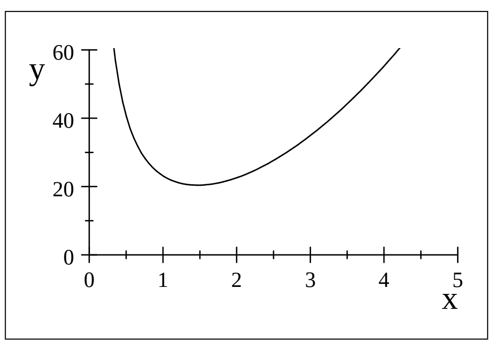
2. Un cilindro sin una tapa. Determinar la cantidad mínima de material necesaria para construir un cilindro con una tapa para un volumen dato de 10mts^3.

RESPUESTA.

Volumen de un cilindro $\pi r^2 h = 10$, de donde $h = \frac{10}{\pi r^2}$.

Área de la superficie del cilindro sin tapa $\pi r^2 + 2\pi r h$. Sustituyendo h se tiene

$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{10}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{20}{r}$



$A'(r) = \left(\pi r^2 + \frac{20}{r}\right)' = 2\pi r - 20r^{-2}$.

El punto crítico se obtiene de $A'(r_0) = 0$. De donde $2\pi r_0 - 20r_0^{-2} = 0, 2\pi r_0 = 20r_0^{-2}$,

$r_0 = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$.

La segunda derivada $A''(r) = 2\pi + 40r^{-3}$ es positiva en $r_0 = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$, se trata de un mínimo.

El material requerido se obtiene de $A(r_0) = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^2 + \frac{20}{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}} = 3\left(10^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt[3]{\pi} \approx 20.394\text{mts}^2$.

4.4 Concavidad y trazado de curvas

Ejemplos.

Ejemplo 7. Trace la gráfica. Identifique puntos extremos(1), intervalos de monotonía(2), intervalos de concavidad(3), ubique extremos locales(4), puntos de inflexión(5), las intersecciones con los ejes(6) y realice un bosquejo de la gráfica (7).

$f_4(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

RESPUESTA.

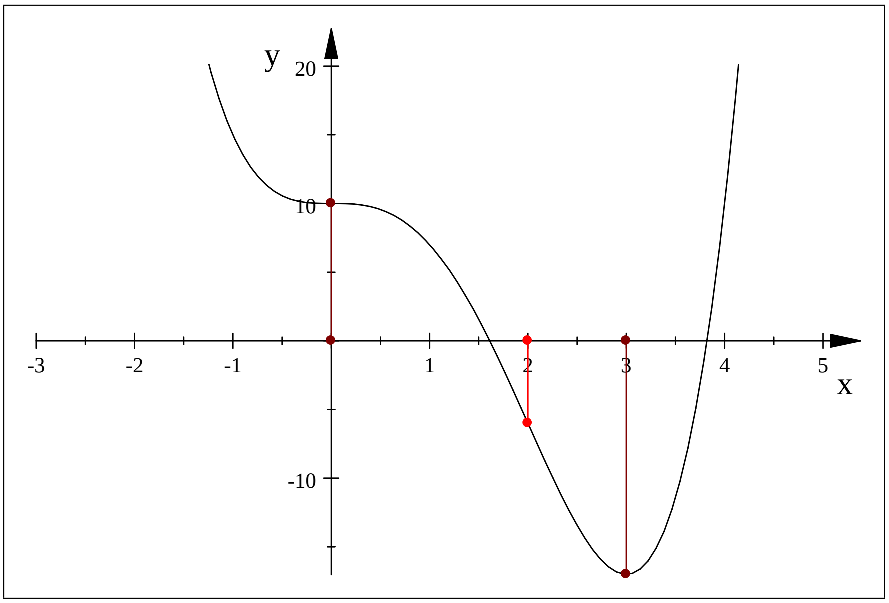
$f_4'(x) = \left(x^4 - 4x^3 + 10\right)' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$.

Puntos criticos: 0 y 3.

$f_4''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$.

Puntos de inflexión: 0 y 2.

$x^4 - 4x^3 + 10$



(1) Puntos extremos: $x = 3$ es un mínimo local y global. $f_4(3) = -17$.

(2) intervalos de monotonía, decreciente en $(-\infty, 3)$ y creciente en $(3, \infty)$.

(3) intervalos de concavidad: concava hacia arriba de $(-\infty, 0)$, concava hacia abajo de $(0, 2)$ y concava hacia arriba de $(2, \infty)$.

(4) Puntos extremos locales: $x = 3$ es un mínimo local. $f_4(3) = -17$.

(5) Puntos de inflexión: $x = 0$ y $x = 2$.

(6) Las intersecciones con los ejes: $x = 0$, intersecta a y. De $x^4 - 4x^3 + 10 = 0$, las raices o intersecciones con el eje X son $x \approx 1.61$ $f_4(1.61) = 0.025\,858\,41$ y $x \approx 3.82$, $f_4(3.82) = -0.033\,734\,24$.

%%%

Global 15I-M. P2

2. Dada la función $f_6(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$, determinar

(a) Dominio y raices. (b) Intervalos donde crece y decrece. (c) Puntos críticos y su clasificación. (d) Intervalos de concavidad. (e) Puntos de inflexión. (f) Ecuaciones de asíntotas verticales y horizontales. (g) Bosquejo de la gráfica.

RESPUESTA.

(a)

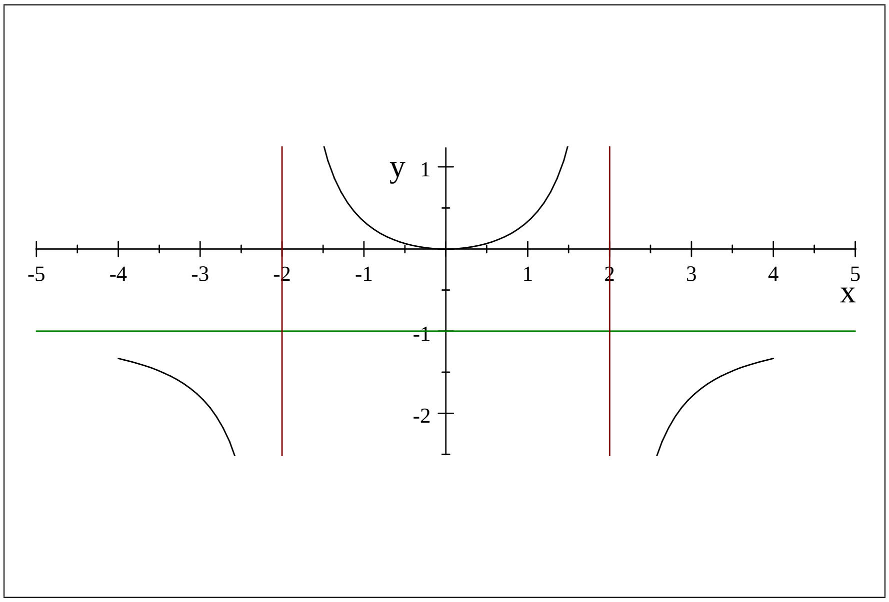
Dominio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Raiz $x = 0$.

Primera derivada $\frac{d}{dx}\frac{x^2}{4-x^2} = 8\frac{x}{(x^2-4)^2}$. Punto crítico $x = 0$.

Segunda derivada $\frac{d^2}{dx^2}\frac{x^2}{4-x^2} = -\frac{8}{(x^2-4)^3}\left(3x^2+4\right)$. No hay puntos de inflexión.

(g) $\frac{x^2}{4-x^2}$



(b) Intervalos donde crece y decrece: en $(-\infty, -2)$, decrece, en $(-2, 0)$ decrece, en $(0, 2)$ crece y en $(2, \infty)$ crece.

(c) Puntos críticos y su clasificación. Punto crítico $x = 0$ y es un mínimo local.

(d) Intervalos de concavidad: en $(-\infty, -2)$, concava hacia abajo, en $(-2, 2)$, concava hacia arriba y en $(2, \infty)$, concava hacia abajo.

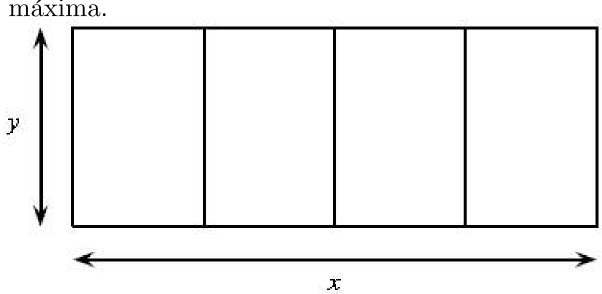
(e) Puntos de inflexión: No tiene.

(f) Ecuaciones de asíntotas verticales y horizontales: $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Como $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1$ tiene $y = -1$ como asíntota horizontal del lado hacia $-\infty$.

Como $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1$ tiene $y = -1$ como asíntota horizontal del lado hacia ∞.

3.Un terreno rectangular está cercado y dividido en cuatro partes iguales con una cerca de alambre. El largo total de la cerca de alambre es de 400 mts. Determinar las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.



%%

Global 15V-M. P2

2. Dada la función $f(x) = \frac{5x^3}{4(x^2-x)}$, determinar

(a) Dominio y raices. (b) Intervalos donde crece y decrece. (c) Puntos críticos y su clasificación. (d) Intervalos de concavidad. (e) Puntos de inflexión. (f) Ecuaciones de asíntotas verticales y horizontales. (g) Bosquejo de la gráfica.

%%

Global 14P-M. P2

2. Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 - 18x$, determinar

(a) Dominio y raíces, (b) puntos críticos y su clasificación, (c) intervalos de monotonía, (d) puntos de inflexión, (e) Intervalos de concavidad.