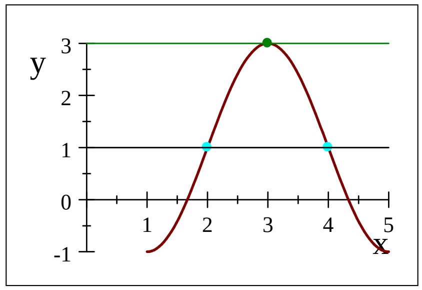
Teorema 3: Teorema de Rolle. Suponga que $f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a,b]$ y es derivable en todo punto de su interior (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a,b) en el que

$$f'(c) = 0.$$



En la gráfica anterior $c = 3$ y se tiene $f'(c) = 0$.

Teorema 4: Teorema del valor medio. Suponga que $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a,b]$ y es derivable en el interior del intervalo (a,b). Entonces existe al menos un punto c en (a,b) en el que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Con la ayuda de la función

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Note que $y(x) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ es la recta de la secante de f que pasa por los puntos a y b. Se cumple que $h(a) = h(b)$ y las hipótesis del Teorema de Rolle. Entonces existe c tal que $h'(c) = 0$. Derivando h, se tiene

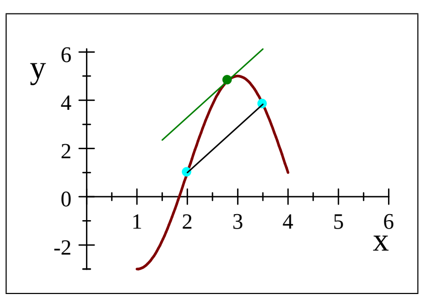
$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sustituyendo c, se tiene

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Despejando $f'(c)$ de la expresión anterior, se obtiene la relación del Teorema del valor medio:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Corolario 1: Si $f'(x) = 0$ en cada punto x de un intervalo abierto (a,b), entonces $f(x) = C$ para toda $x \in (a,b)$, donde C es una constante.

Corolario 2: Si $f'(x) = g'(x)$ en cada punto x de un intervalo abierto (a,b), entonces existe una constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para toda $x \in (a,b)$. Esto es $f - g$ es una función constante en (a,b).