**4.3 Funciones monótonas y el criterio de la primera derivada**

**Corolario 3.** Suponga que $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y es derivable en $(a,b)$.

$$\begin{aligned}
\text{Si } f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) > 0, \text{ en cada punto } x \in (a,b,), \text{ entonces } f \text{ es creciente en } (a,b). \\
\text{Si } f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) < 0, \text{ en cada punto } x \in (a,b,), \text{ entonces } f \text{ es decreciente en } (a,b).
\end{aligned}$$

Prueba.

Sean $x_1 < x_2$ en $(a,b)$. El teorema del valor medio aplicado a $f$ en $[x_1, x_2]$ establece que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Es creciente o decreciente dependiendo del signo de $f'(c)$. Con $f(x) > 0$ se tiene $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, de donde $f(x_1) > f(x_2)$, o sea $f$ es creciente. El otro caso, con $f(x) < 0$ se tiene $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0$, de donde $f(x_1) < f(x_2)$, $f$ es decreciente.

Ejemplo.

$f(x) = x^3 - 27x - 15$

$\frac{d}{dx}\left(x^3 - 27x - 15\right) = 3x^2 - 27 = 3\left(x^2 - 9\right).$

Se calculan los puntos críticos de $3\left(x^2 - 9\right) = 0.$

$x^2 = 9$, $x_1 = \sqrt{9} = 3$ y $x_2 = -3$.

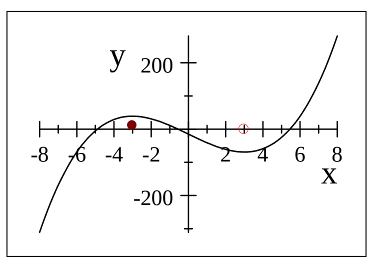
Los puntos críticos son de $f'$: $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$.

Los intervalos para estudiar la función son

$(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, \infty)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Intervalo | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 3)$ | $(3, \infty)$ |
| $f'(x) = 3\left(x^2 - 9\right)$ evaluada | $f'(-4) = 21$ | $f'(0) = -27$ | $f'(4) = 21$ |
| Signo de $f'$ | + | - | + |
| Comportamiento de $f$ | creciente | decreciente | creciente |

$f(x) = x^3 - 27x - 15$




**Criterio de la primera derivada para extremos locales.** Suponga que $c$ es un punto crítico de una función continua $f$, y que $f$ es derivable en todo punto de algún intervalo que contenga a $c$, excepto posiblemente $c$ mismo. Al moverse de izquierda a derecha en este intervalo,

1. si $f'$ cambia de negativa a positiva en $c$, entonces $f$ tiene un mínimo local en $c$;
2. si $f'$ cambia de positiva a negativa en $c$, entonces $f$ tiene un máximo local en $c$;
3. si $f'$ no cambia de signo $c$ (esto es, $f'$ es positiva en ambos lados de $c$ o $f'$ es negativa en ambos lados de $c$), entonces $f$ no tiene un extremo local en $c$.

Ejemplo:$f_1(x) = \sqrt[3]{x}(x-4)$

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}(x-4)\right) = \frac{4}{3x}\sqrt[3]{x}(x-1)$

$g(x) = \frac{4}{3x}\sqrt[3]{x}(x-1)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Intervalo | $(-\infty, 1)$ | $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon), \varepsilon > 0$ | $(1+\varepsilon, \infty)$ |
| Signo de $f' = \frac{d}{dx}f$ | negativa | negativa a positiva | positiva |
| Comportamiento de $f$ | decreciente | mínimo local | creciente |