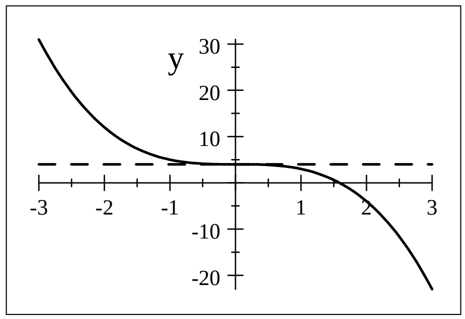
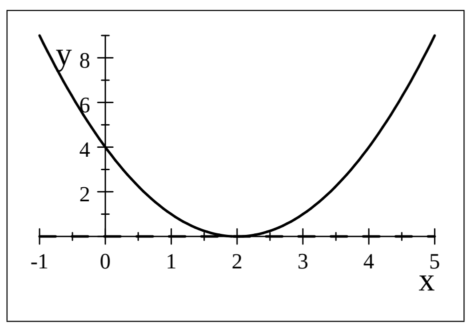
Tarea 3. Cálculo Diferencial
Profesor: Carlos Barrón Romero
El objetivo de la tarea es expander tu curiosiodad y fortalecer tus bases deductivas en la resolución de problemas.
El valor de cada pregunta aparece entre [].
Los problemas son similares a los de la sección 3.1 del libro de texto: Cálculo de un variable, George B. Thomas.

1. Encuentre la ecuación de la tangente en el punto x_0 indicado y elabore una gráfica de la curva y la tangente:

   (a) [1.0] $y = 4 - x^3$, $x_0 = 0$.
   RESPUESTA.
   $y'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(4-(0+h)^3\right)-\left(4-(0)^3\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 = 0$.
   En el punto $(0, 4)$ se tiene una tangente horizontal que pasa por $y = 4$.



   (b) [1.0] $y = (x-2)^2$, $x_0 = 2$.
   RESPUESTA.
   $y'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{((2+h)-2)^2-(2-2)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4(2+h)+4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-8-4h+4}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$.
   En el punto x_0 se tiene una tangente horizontal



2. Un objeto en caida libre sigue la ecuación $y = 50 - \frac{50}{9}t^2$.

   (a) [0.5] A que altura se encuentra cuando $t = 2$.
   RESPUESTA.
   Sustituyendo $t = 2$, se tiene $y(2) = 50 - \frac{50}{9}(2)^2 = \frac{(50)9-50(4)}{9} = \frac{450-200}{9} = \frac{250}{9} \approx 27.78$.

   (b) [1.5] ¿Cuanto tiempo tarda en llegar al suelo y con que velocidad instantanea?
   RESPUESTA:
   Se tiene: $y(t_0) = 50 - \frac{50}{9}t_0^2 = 0$ donde t_0 es el tiempo que tarda en llegar al piso $(y = 0)$.
   $50 - \frac{50}{9}t_0^2 = 0$, $50 = \frac{50}{9}t_0^2$, se tiene $t_0 = \sqrt{9} = 3$.
   La velocidad instantanea se obtiene de la derivada de y' en $t_0 = 3$.
   $\lim_{h\to 0} \frac{\left(50-\frac{50}{9}(3+h)^2\right)-\left(50-\frac{50}{9}(3)^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{50}{9}(3+h)^2+\frac{50}{9}(3)^2}{h} = \frac{50}{9}\lim_{h\to 0} \frac{-(3+h)^2+(3)^2}{h} = \frac{50}{9}\lim_{h\to 0} \frac{-9-6h-h^2+9}{h} = -\frac{50}{9}(6) = -\frac{50}{3}(2) = -\frac{100}{3} \approx -33.33$.

(c) [1.5] ¿En que momento de su caida, la velocidad instantanea es la mitad de la velocidad con que llega al piso?
RESPUESTA.
Sea t_1 el tiempo en que la velocidad instantanea es la mitad de $-\frac{100}{3}$.
Se tiene $-\frac{50}{3} = \lim_{h\to 0} \frac{50-\frac{50}{9}(t_1+h)^2-\left(50-\frac{50}{9}(t_1)^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{50}{9}(t_1+h)^2+\frac{50}{9}(t_1)^2}{h} =$
$\frac{50}{9}\lim_{h\to 0} \frac{-(t_1+h)^2+(t_1)^2}{h} = \frac{50}{9}\lim_{h\to 0} \frac{-t_1^2-2t_1h-h^2+(t_1)^2}{h} = \frac{50}{9}\lim_{h\to 0} \frac{-2t_1h-h^2}{h} =$
$\frac{50}{9}(-2t_1) = -\frac{100}{9}t_1$. De donde $-\frac{50}{3} = -\frac{100}{9}t_1$, despejando t_1,
$t_1 = \frac{50(9)}{3(100)} = \frac{3}{2} = 1.5$.

(d) [0.5] Encuentre las expresiones de la velocidad instantanea y de la aceleración del objeto.
RESPUESTA:
Por definición $y'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{50-\frac{50}{9}(t+h)^2-\left(50-\frac{50}{9}(t)^2\right)}{h} = \frac{50}{9}\lim_{h\to 0} \frac{-2th-h^2}{h} = \frac{50}{9}(-2t) = -\frac{100}{9}t.$
Tomando $y'(t) = -\frac{100}{9}t$, su derivada es la aceleración:
$y''(t) = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{100}{9}(t+h)-\left(-\frac{100}{9}t\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{100}{9}h}{h} = -\frac{100}{9}\lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = -\frac{100}{9}.$

3. [1.0] ¿Cual es la tasa de cambio del volumen de una pelota ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$) con respecto al radio, cuando el radio $r = 0$ y cuando $r = 1.5$.

RESPUESTA.

Sea $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. La tasa de cambio de $V(r)$ corresponde al cambio entre $r_1 = 1.5$ y $r_0 = 0$: $\frac{V(r_1)-V(r_1)}{r_1-r_0}$.
Sustituyendo

$$\frac{V(1.5)-V(0)}{1.5-0} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1.5)^3-0}{1.5-0} = \frac{4}{3}\pi(1.5)^2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3\pi \approx 9.425$$

4. [1.0] Demostrar mediante la definición de derivada, si la función valor absoluto ($y = |x|$) tiene derivada en $x_0 = 0$.

RESAPUESTA.

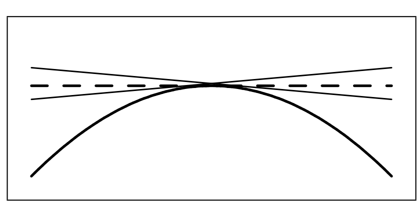
La función correponde con la recta $y = x$ cuando $x > 0$ y con la recta $y = -x$ cuando $x < 0$.

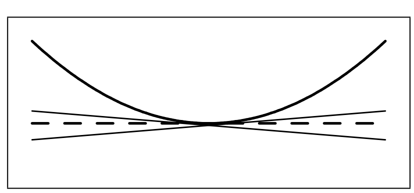
La derivada con $x > 0$ corresponde con $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$ y para $x < 0$ se tiene $\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)-(-x)}{h} =$ $\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1$. Esto significa que la derivada por la izquierda de 0 es -1 y que la derivada por la derecha de 0 es 1. Como no es mismo límite en $x = 0$, no hay derivada de $y = |x|$ en $x = 0$.

5. [1.0] Construya las graficas de la funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ y gráfique las ecuaciones de sus tangentes en los máximos y mínimos.

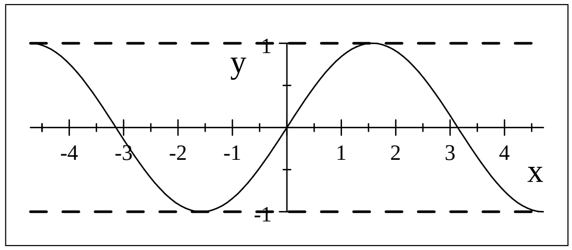
RESPUESTA.

Las tangentes de los máximos y minimos corresponden a rectas que se van acercando a una linea horizontal, es decir a una recta de pendiente 0 y que pasa por $y = 1$ y $y = -1$.

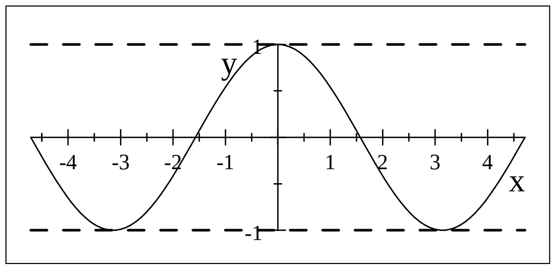




Por lo que la gráfica resultante de $\sin(x)$ es



Por lo que la gráfica resultante de $\cos(x)$ es



6. [1.0] Explique si la fórmula alternativa:

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

es igual a la derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Hint. Use un cambio de variable apropiado.

RESPUESTA.

Tomando $h = z - x$, $h \neq 0$ se tiene que $\lim_{h\to 0} h = 0 = \lim_{z\to x}(z - x) = 0$. O sea el cambio de variable permite cambiar $\lim h \to 0$ por $\lim z \to x$.

Por tanto sustituyendo $z = x + h$, $h = z - x$ y $\lim_{z\to x}$ en la definición se tiene:

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$. Por tanto $\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(x)$.