UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – AZCAPOTZALCO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
Examen Tarea Profr. Carlos Barrón Romero Global de Cálculo Diferencial Trimestre 18P

Alumno:______________________________ Matrícula:______________

Nota: El examen global consta de los problemas marcados al inicio por % (porcentaje). Quienes recuperen una parte del curso deberán resolver todos los problemas de esa parte.

Todas las respuestas deben ser justificadas y mostrar el procedimiento utilizado.

PRIMERA PARTE

1. Calcular la derivada de las funciones:

   (a)
   $$f(x) = 6x^2 \cos^3(3x+1).$$

   RESPUESTA.
   $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[6x^2 \cos^3(3x+1)\right] = \frac{d}{dx}\left[6x^2\right]\cos^3(3x+1) + 6x^2 \frac{d}{dx}\left[\cos^3(3x+1)\right] = ...$

   (b) (10%)
   $$r(\theta) = \sqrt[3]{\frac{8-\theta^2}{\theta^3}}.$$

   RESPUESTA.
   $\frac{d}{d\theta} r(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left[\sqrt[3]{\frac{8-\theta^2}{\theta^3}}\right] = \frac{d}{d\theta}\left[\left(\frac{8-\theta^2}{\theta^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{d}{d\theta}\left[\theta^{-1}\left(8-\theta^2\right)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{d}{d\theta}\left[\theta^{-1}\right]\left(8-\theta^2\right)^{\frac{1}{3}} + \theta^{-1}\frac{d}{d\theta}\left[\left(8-\theta^2\right)^{\frac{1}{3}}\right] =$ ...

2. (10%) Dada la ecuación
   $$x \sin(y) = y \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
   determinar las ecuaciones de la tangente y de la recta normal a la curva en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

   RESPUESTA.

   Verificamos que el punto corresponda a la curva por sustitución de $(x,y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

   $\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$, se tiene $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

   Por derivación implicita: $[x\sin(y)]' = \left[y\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]'$,

   $x'\sin(y) + x[\sin(y)]' = [y]'\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + y\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]'$

   $\sin(y) + x\cos(y)\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + y\left(-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

   $\sin(y) + x\cos(y)\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - y\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

   $\frac{dy}{dx}\left(x\cos(y) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin(y) - y\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$

   $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(y) + y\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x\cos(y) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$, sustituyendo el punto:

   $\frac{dy}{dx}\Big|_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} = 1.$

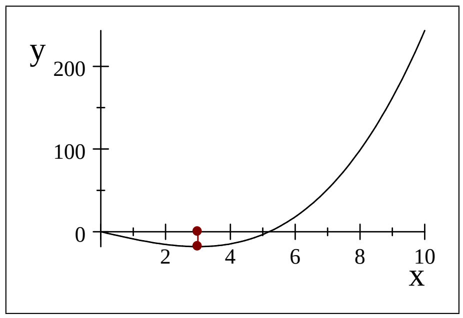
   Ecuación de la tangente:$1 = \frac{y - \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}, y = x.$

   Ecuacion de la normal: $-1 = \frac{y - \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}, y = -x + \pi.$

3. La posición de un movil está dada por:
   $$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 9t, t \geq 0.$$

(a) Determinar la aceleración cuando la velocidad es cero.
RESPUESTA.
Primera y segunda derivada: $s'(t) = t^2 - 9$, $s''(t) = 2t$.
La condición $s'(t_0) = 0$, conduce a que $t_0^2 - 9 = 0$, o sea $t_0 = 3$.
Por tanto $s''(3) = 2\,(3) = 6$.

(b) Determinar los intervalos donde se mueve en sentido negativo y en sentido positivo.
RESPUESTA.
Un punto crítico es $t_0 = 3$. donde la función tiene mínimo.
O sea la función indica que el objeto se mueve en sentido negativo de $[0, 3]$, luego de la cual se mueve en sentido positivo de $[3, \infty)$.



4. (10%) Una placa cuadrada se expande. Si el lado aumenta a razón de 2 cm/min (cm: centimetro). ¿Cual es la rápidez del crecimiento del área cuando el lado mide 10 cm?

RESPUESTA.

La fórmula de área del cuadrado es $A(x) = x^2$ donde x es el tamaño del lado.

Tenemos $\frac{dx}{dt} = 2$.

Derivando el área respecto al tiempo se tiene $\frac{d}{dt}A(x) = 2x\frac{dx}{dt}$. Por tanto la rápidez del crecimiento del área se obtiene de

$\frac{d}{dt}A(x)|_{x=10} = 2\,(10)\,(2) = 40\ \mathrm{cm}^2/\min$.

SEGUNDA PARTE

1. (20%) Considere la función

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{x - 4}.$$

Determinar lo siguiente:

(a) Dominio y ceros.
RESPUESTA.
Los ceros son de resolver el denominador igual a 0, $9 - x^2 = 0$. Los ceros son -3 y 3.
El dominio de f es $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

(b) Ecuaciones de las asíntotas oblicuas, horizontales y verticales.
RESPUESTA.
Tiene una asíntota vertical en $x = 4$.
Al dividir $\frac{9-x^2}{x-4} = -x - 4 - \frac{7}{x-4}$. Notemos que $\lim_{x\to\infty} -\frac{7}{x-4} = 0$.
Por lo que se tiene la asíntota oblicua: $y = -x - 4$.
No tiene más asíntotas.

(c) Puntos críticos y su clasificación.
RESPUESTA.
Primera derivada $\frac{d}{dx}f\left(x\right)=\frac{d}{dx}\frac{9-x^{2}}{x-4}=-\frac{1}{(x-4)^{2}}\left(x^{2}-8x+9\right)$
Segunda derivada: $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{(x-4)^{2}}\left(x^{2}-8x+9\right)\right)=-\frac{14}{(x-4)^{3}}$.
Los puntos críticos son de $\left(x^{2}-8x+9\right)=0$ y son $4-\sqrt{7}\approx 1.354$ y $4+\sqrt{7}\approx 6.646$.
Como $f''(4-\sqrt{7})>0$, la función tiene un valor mínimo local.
Como $f''(4+\sqrt{7})<0$, la función tiene un valor máximo local.

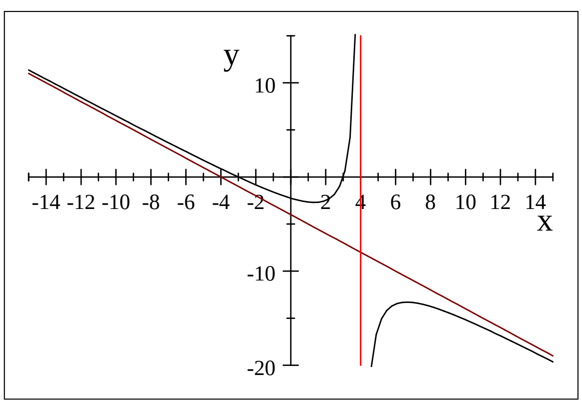
(d) Intervalos de monotonía.
RESPUESTA.
En $(-\infty,4-\sqrt{7}]$ la función f es decreciente.
En $[4-\sqrt{7},4)$ la función f es creciente.
En $(4,4+\sqrt{7}]$ la función f es creciente.
En $[4+\sqrt{7},\infty)$ la función f es decreciente.

(e) Intervalos de concavidad.
RESPUESTA.
En $(-\infty,4)$ la función f es concava hacia arriba.
En $(4,\infty)$ la función f es concava hacia abajo.

(f) Puntos de inflexión.
RESPUESTA.
$\frac{d^{2}}{dx^{2}}f\left(x\right)=\frac{d^{2}}{dx^{2}}\frac{9-x^{2}}{x-4}=-\frac{14}{(x-4)^{3}}$. Punto de inflexión $x=4$, hay cambio de curvatura pero no existe el limite $\lim_{x\to 4}f(x)$.

(g) Valores extremos locales, globales y su clasificación.
Los valores extremos son dos y son locales, como se indica en el inciso c.

(h) Esboce la gráfica de la función y las asíntotas.
RESPUESTA.



2. (10%) Se requiere contruir una caja de madera sin tapa con un área total de 40 cm^2. El ancho de la caja debe ser el doble del largo y la altura es de libre. Determinar las dimensiones de la caja de mayor volumen.

RESPUESTA.

Datos del problema.

Volumen caja de madera: $V=alh$, donde a: ancho, l: largo y h: altura.

Área de la caja sin tapa 40 cm^2. Corresponde con el área de la base (no tiene tapa) y la cuatro caras laterales.

Se tiene $40=al+2ah+2lh$.

Se debe considerar que ancho es el doble del largo: $a=2l$.

Sustituyendo $a = 2l$ en el área se tiene: $40 = (2l)\, l + 2\,(2l)\, h + 2lh = 2l^2 + 4lh + 2lh = 2l^2 + 6lh$.

Despejado $h = \frac{40-2l^2}{6l}$.

Sustituyendo ancho y altura en el volumen se obtiene:

$V\,(l) = (2l)\, l \left(\frac{40-2l^2}{6l}\right) = \frac{l}{3}\left(40 - 2l^2\right) = \frac{40l}{3} - \frac{2}{3}l^3$.

$V\,(l) = \frac{40l}{3} - \frac{2}{3}l^3$

Primera y segunda deriva del volumen:

$V'\,(l) = \frac{40}{3} - 2l^2, V''\,(l) = -4l$.

Como $V''\,(l) > 0, l > 0$ la función tiene un valor máximo.

El punto crítico se obtiene de $V'(l_0) = 0$, $\frac{40}{3} - 2l_0^2 = 0$, de donde $l_0 = \sqrt{\frac{40}{3}\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{20}{3}} \approx 2.582$.

El largo es $l_0 = \sqrt{\frac{20}{3}} \approx 2.582$.

El volumen es $V(l_0) = \frac{40\sqrt{\frac{20}{3}}}{3} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^3 \approx 22.951$.

Ancho $a = 2l_0 = 2\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right) \approx 5.164$.

Altura $h = \frac{40-2l_0^2}{6l_0} = \frac{40-2\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^2}{6\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)} \approx 1.721$.

3. Dada la derivada:

$$\frac{d}{dx}g\,(x) = 2\sin\,(2x)$$

en el intervalo $[0, \pi]$. Determinar para la función $g(x)$:

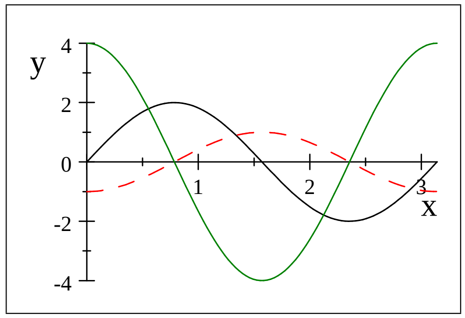
(a) Puntos críticos.
RESPUESTA.
Como g' tiene como ceros a los puntos $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.
Como $g'(x) = 2\sin\,(2x)$ pasa de ser negativa antes de $x = 0$ a positiva después de $x = 0$, en $x = 0$ la función g tiene un mínimo global.
Note que $g'(x) = 2\sin\,(2x)$ pasa de ser positiva antes de $x = \frac{\pi}{2}$ a negativa después de $x = \frac{\pi}{2}$, en $x = \frac{\pi}{2}$ la función g tiene un máximo local.
Se tiene que $g'(x) = 2\sin\,(2x)$ pasa de ser negativa antes de $x = \pi$ a negativa después de $x = \pi$, en $x = \pi$ la función g tiene un mínimo global.

(b) Máximos, mínimos locales (relativos).
En $x = \frac{\pi}{2}$ la función g tiene un máximo local y global.

(c) Puntos de inflexión.
RESPUESTA.
La segunda derivada $g''(x) = 4\cos\,(2x)$ se anula en $\frac{\pi}{4}$ $\left(4\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 0\right)$ y en $\frac{3\pi}{4}$ $\left(4\cos\left(2\frac{3\pi}{4}\right) = 0\right)$.
Los puntos de inflexión son $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$.

(d) Intervalos de concavidad.
RESPUESTA.
En $[0, \frac{\pi}{4}]$ la función g es concava hacia arriba (tiene un valor mínimo).
En $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ la función g es concava hacia abajo (tiene un valor máximo).

(e) En $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ la función g es concava hacia arriba (tiene un valor mínimo).
Note que $g(x) = -\cos 2x$. Graficas de g, g'y g''.



TERCERA PARTE

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

   (a) (10%)
   $$f(x) = [\arcsin(\pi x)]^{\cos(\pi x^2)}.$$

   RESPUESTA.

   $\ln(f(x)) = \ln\left([\arcsin(\pi x)]^{\cos(\pi x^2)}\right) = \cos(\pi x^2)\ln([\arcsin(\pi x)])$. Derivando se obtiene

   $\frac{1}{f(x)} f'(x) = \left[\cos(\pi x^2)\ln([\arcsin(\pi x)])\right]' = \left[\cos(\pi x^2)\right]' \ln([\arcsin(\pi x)]) + \cos(\pi x^2)\left[\ln([\arcsin(\pi x)])\right]' =$
   $-\sin(\pi x^2)(\pi 2x)\ln([\arcsin(\pi x)]) +$
   $\cos(\pi x^2)\frac{1}{\arcsin(\pi x)}\frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}\pi = -2\pi x\sin(\pi x^2)\ln([\arcsin(\pi x)]) + \cos(\pi x^2)\frac{1}{\arcsin(\pi x)}\frac{\pi}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}.$

   De donde
   $$\begin{aligned} f'(x) &= [\arcsin(\pi x)]^{\cos(\pi x^2)}\left(-2\pi x\sin(\pi x^2)\ln([\arcsin(\pi x)]) + \cos(\pi x^2)\frac{\pi}{\arcsin(\pi x)\sqrt{1-(\pi x)^2}}\right) \\ f'(x) &= [\arcsin(\pi x)]^{\cos(\pi x^2)}\left(\ln\left(\left[\arcsin(\pi x)^{-2\pi x\sin(\pi x^2)}\right]\right) + \frac{\pi\cos(\pi x^2)}{\arcsin(\pi x)\sqrt{1-(\pi x)^2}}\right). \end{aligned}$$

   (b)
   $$f(x) = \exp\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt{\cos(4x)}}\right).$$

   RESPUESTA.

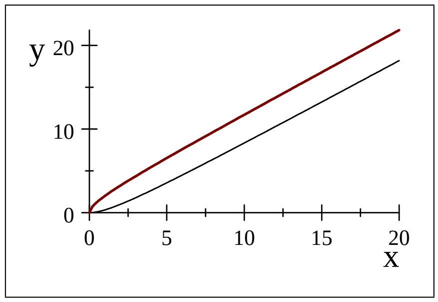
   $f'(x) = \left[\exp\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt{\cos(4x)}}\right)\right]' = \exp\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt{\cos(4x)}}\right)\left[\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt{\cos(4x)}}\right]' = \exp\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt{\cos(4x)}}\right)\left[(x^3-2)^{\frac{1}{3}}(\cos(4x))^{-\frac{1}{2}}\right]' =$
   $\exp\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt{\cos(4x)}}\right)\left(\left[(x^3-2)^{\frac{1}{3}}\right]'(\cos(4x))^{-\frac{1}{2}} + (x^3-2)^{\frac{1}{3}}\left[(\cos(4x))^{-\frac{1}{2}}\right]'\right) =$
   $\exp\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt{\cos(4x)}}\right)\left(\frac{1}{3}(x^3-2)^{\frac{1}{3}-1}3x^2(\cos(4x))^{-\frac{1}{2}} + (x^3-2)^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}(\cos(4x))^{-\frac{1}{2}-1}\right)4\right) =$
   $\exp\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt{\cos(4x)}}\right)\left((x^3-2)^{-\frac{2}{3}}x^2(\cos(4x))^{-\frac{1}{2}} + (x^3-2)^{\frac{1}{3}}\left(-2(\cos(4x))^{-\frac{3}{2}}\right)\right) =$
   $\exp\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt{\cos(4x)}}\right)\left(\frac{x^2}{(x^3-2)^{\frac{2}{3}}(\cos(4x))^{\frac{1}{2}}} - \frac{2(x^3-2)^{\frac{1}{3}}}{(\cos(4x))^{\frac{3}{2}}}\right).$

2. Considere la función
   $$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

   Determinar:

(a) La inversa de la función.
RESPUESTA.
Sea $y = \frac{x^2}{x+2}$. Se despeja x de la ecuación cuadrática: $x^2 - yx - 2y = 0$. Usando $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se tiene
$x_1 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sqrt{y(y+8)}$ y
$x_2 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\sqrt{y(y+8)}$
Note que se requiere que $y(y+8) \geq 0$, o sea $(-\infty, -8] \cup [0, \infty)$.

(b) El dominio y rango de la función inversa.
Tomando $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x(x+8)}$.
Tomando como dominio $[0, \infty)$, el rango es $[0, \infty)$.



(c) La derivada de la función inversa.
RESPUESTA.
$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x(x+8)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x(x+8))^{-\frac{1}{2}}[x(x+8)]' =$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x(x+8))^{-\frac{1}{2}}\left[x^2+8x\right]' = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x(x+8))^{-\frac{1}{2}}(2x+8) =$
$\frac{1}{2} + \frac{2x+8}{4(x(x+8))^{\frac{1}{2}}}$.

3. (10%) Determinar por el polinomio de Taylor de grado 2 el valor de $\frac{1}{\sqrt{2.2}}$ usando la siguiente función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}} = (2+x)^{-\frac{1}{2}}$$

alrededor del punto $x_0 = 2$.

RESPUESTA.

$x = 0$

Polinomio de Taylor, Maclaurin: $\sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

$f'(x) = -\frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{3}{2}}$, $f'(0) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2^3}} = -0.176\,78$

$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(2+x)^{-\frac{5}{2}}$, $f''(0) = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2^5}}. = 0.132\,58$

$f(0.2) \approx \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)(0.2) + \frac{f''(0)}{2}(0.2)^2$, sustituyendo

$\frac{1}{\sqrt{2}} + (-0.176\,78)(0.2) + \frac{(0.132\,58)}{2}(0.2)^2 = 0.674\,4$

Como $\frac{1}{\sqrt{2.2}} = 0.674\,20$ el resultado aproximado es correcto.

4. (20%) Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2-3}{\exp(x^2)}.$$

Determinar

(a) Dominio y ceros.
RESPUESTA.
Los ceros son de $x^2 - 3 = 0$ y son: $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$.
Dominio $\mathbb{R}$.

(b) Ecuaciones de sus asíntotas.
RESPUESTA.
Usamos Regla de Hôpital para calcular los límites:
$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3}{\exp(x^2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{2x \exp(x^2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\exp(x^2)} = 0$
$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-3}{\exp(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2x \exp(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\exp(x^2)} = 0$
La ecuación de la asíntota horizontal es $y = 0$.

(c) Puntos críticos y su clasificación.
RESPUESTA.
Usando la primera derivada: $f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^2-3}{\exp(x^2)} = -2xe^{-x^2} \left(x^2 - 4\right)$.
Los ceros o puntos críticos se obtienen de $2x \left(x^2 - 4\right) = 0$.
Los puntos críticos son: $x_1 = -2$,$x_2 = 0$ y $x_3 = -2$.
La segunda derivada $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} \frac{x^2-3}{\exp(x^2)} = 2e^{-x^2} \left(2x^4 - 11x^2 + 4\right)$
$f''(x_1) = 2e^{-(-2)^2} \left(2(-2)^4 - 11(-2)^2 + 4\right) = -0.29305 < 0$, la función f tiene un máximo local en x_1.
$f''(x_2) = 2e^{-(0)^2} \left(2(0)^4 - 11(0)^2 + 4\right) = 8.0 > 0$, la función f tiene un mínimo local en x_2.
$f''(x_3) = 2e^{-(2)^2} \left(2(2)^4 - 11(2)^2 + 4\right) = -0.29305 < 0$, la función f tiene un máximo local en x_3.