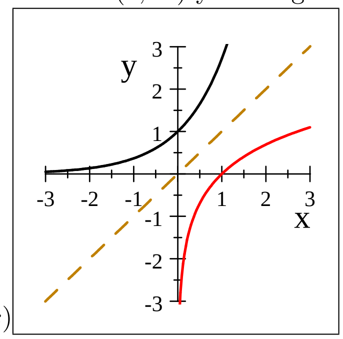
7.3 Funciones exponenciales

Definición. Para todo número real x, se define la **función exponencial natural** como

$$e^x = \exp(x)$$

donde la base $e = 2.718\,281\,8$. El dominio de la función exp es $\mathbb{R}$ y su rango es $(0, \infty)$.
El dominio de la función ln es $(0, \infty)$ y su rango es $\mathbb{R}$.

Gráficas de e^x y $\ln(x)$ 

Note: Que son simétricas respecto a la recta y=x.

Además la función exp es estrictamente creciente y por tanto inyectiva en $\mathbb{R}$ y su función inversa es ln. Se tienen entonces las ecuaciones inversas para exp y ln.

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \text{ para toda } x > 0. \\ \ln(e^x) &= x \text{ para toda } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Derivada de e^x

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x).$$

Derivada de $\ln x$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Y para cualquier función $u = u(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\exp(u) &= \exp(u)\frac{d}{dx}u, \\ \frac{d}{dx}\ln(u) &= \frac{1}{u}\frac{d}{dx}u. \end{aligned}$$

Leyes de los exponentes

$$\begin{aligned} e^{x_1}e^{x_2} &= e^{x_1+x_2} \\ \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} &= e^{x_1-x_2} \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\ (e^x)^y &= e^{xy} \end{aligned}$$

Definición. Para cualesquiera números reales $a > 0$ y x, la **función exponencial con base** a es

$$a^x = \exp(x\ln(a)) = e^{x\ln a}.$$

Esta última expresión permite calcular las potencias de números reales para cualquier base.

La identidad $e^{\ln u} = u$ es muy útil para calcular derivas de funciones cuando las funciones aparecen como exponentes.

Ejemplo.

Calcular la derivada de $x^{\sin\left(x^2\right)}$.

RESPUESTA.

$\frac{d}{dx} x^{\sin\left(x^2\right)} = \frac{d}{dx} \exp\left(\ln\left(x^{\sin\left(x^2\right)}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\sin\left(x^2\right)\ln\left(x\right)\right)\right) =$
$\exp\left(\sin\left(x^2\right)\ln\left(x\right)\right)\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^2\right)\ln\left(x\right)\right) = \exp\left(\sin\left(x^2\right)\ln\left(x\right)\right)\left(\frac{d}{dx}\sin\left(x^2\right)\ln\left(x\right) + \sin\left(x^2\right)\frac{d}{dx}\ln\left(x\right)\right) =$
$\exp\left(\sin\left(x^2\right)\ln\left(x\right)\right)\left(\cos\left(x^2\right)2x\ln\left(x\right) + \sin\left(x^2\right)\frac{1}{x}\right) = x^{\sin\left(x^2\right)}\left(2x\ln\left(x\right)\cos\left(x^2\right) + \sin\left(x^2\right)\frac{1}{x}\right) =$
$x^{\sin\left(x^2\right)}\left(\frac{2x^2\ln(x)\cos\left(x^2\right)+\sin\left(x^2\right)}{x}\right) = x^{\sin\left(x^2\right)-1}\left(2x^2\ln\left(x\right)\cos\left(x^2\right) + \sin\left(x^2\right)\right).$

A continuación respondemos la pregunta: ¿De donde viene la base e y el concepto de trascente?

Se define $e = \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Usando el cambio de variable $x = \frac{1}{n}$ se tiene que:

$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots\right] =$
$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\frac{1}{n^4} + \cdots\right] =$
$2 + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\frac{1}{n^4} + \cdots\right] =$
$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}.$

Por otro lado, la serie de Taylor con $a = 0$ o sea de la serie de Maclaurin para exp es
$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k$. Como $\frac{d}{dx}\exp\left(x\right) = \exp\left(x\right)$ y $\exp(0) = 1$, se tiene:
$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ y con $x = 1$ se obtiene $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}$.

De donde $\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = 2 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} = \exp(1) = e^1 = e$.

Es decir la serie de Maclaurin permite comprobar que la base de los logaritmos naturales es efectivamente el $\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$ que aparece en todos los libros de texto.

Además permite establecer que e no es solución de polinomios de grado finito, sino que e es un número trascendente, que da nombre al Tema 3. Funciones Trascendentes.