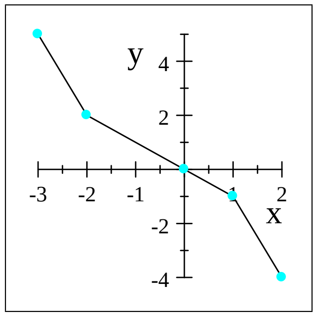
10.8 Función Inversa

Definición. Una función $f(x)$ es inyectiva en su dominio $\mathbb{D}$ si $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$.

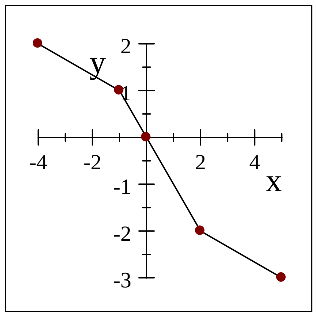
Por ejemplo. Dada la función como una tabla

x	-3	-2	0	1	2
$y = f(x)$	5	2	0	-1	-4

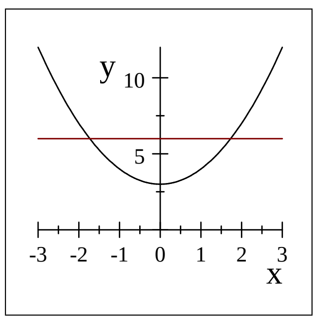


La inversa existe si valores distintos de $f(x)$ mapean a valores distintos de x.

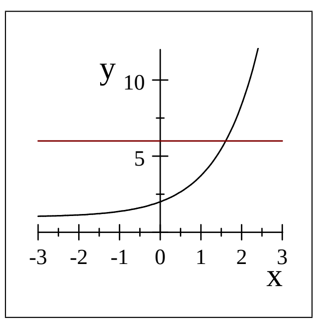
y	-4	-1	0	2	5
$x = f^{-1}(y)$	2	1	0	-2	-3



Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas. Una función es inyectiva si la grafica de la función respecto de y se intersecta en un solo punto.

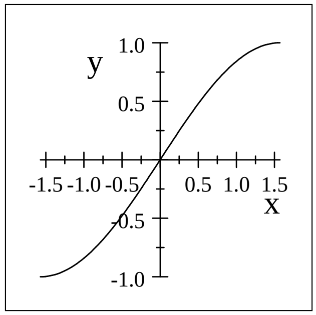


Función no inyectiva



Función inyectiva

Las funciones como el seno y coseno que son periodicas tienen inversa en sus regiones de monotonía. Por ejemplo el seno en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



Función inyectiva

Nota. Si la función es inyectiva en el dominio $\mathbb{D}$ y tiene rango $\mathbb{R}$, entonces la función inversa es inyectiva y tiene como dominio $\mathbb{R}$ y como rango $\mathbb{D}$.

Algunas funciones tienen sus inversas con nombre propio como:

Función	$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	Inversa	$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$
exp	$\mathbb{R}$	$(0,\infty)$	ln	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
sin	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$	arcsin	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
cos	$[0,\pi]$	$[-1,1]$	arccos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$

En general la inversa se denota como f^{-1}. El contexto explica que no se trata de la función elevada a la menos 1.

Método para determinar la función inversa.

1) Calcular los puntos críticos.

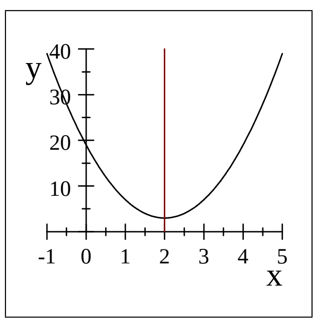
2) Determinar un intervalo de monotonía.

3) Escribir la ecuación $y = f(x)$ y despejar x apropiadamente en un intervalo donde f es estrictamente monótona.

EJEMPLO.

Sea $f(x) = (2x-4)^2 + 3$.

Determinar una función inversa para f.



Se trata de una parábola, cóncava hacia arriba. Con dominio $\mathbb{R}$ y rango $[3,\infty)$.

1) Puntos críticos. Primera derivada: $f'(x) = \left[(2x-4)^2+3\right]' = 2(x-4)\,2 = 4(2x-4)$.

De $f'(x_0) = 0$. Se obtiene $x_0 = 2$. Que es el punto crítico donde la función tiene un valor extremo mínimo local y global.

2) Por tanto la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2]$ y creciente en el intervalo $[2,\infty)$.

Tomaremos el intervalo $[2,\infty)$ como dominio y el rango de f es $[2,\infty)$.

3) Se tiene $y = (2x-4)^2 + 3$. Despejando x, se tiene $y-3 = (2x-4)^2$, $\sqrt{y-3} = 2x-4$, $y \geq 3$.

Finalmente $x = \frac{\sqrt{y-3}+4}{2} = \frac{\sqrt{y-3}}{2} + 2$, $y \geq 3$.

La función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{2} + 2$, con dominio $[3,\infty)$ y rango $[2,\infty)$.