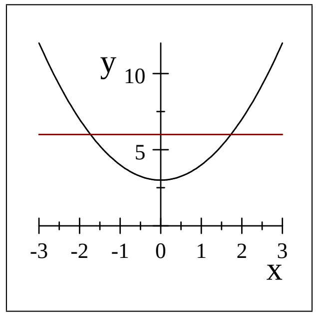
10.8 Función Inversa.

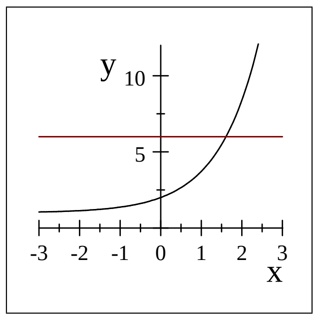
Se revisoaron los conceptos de la clase anterior.

Definición. Una función $f(x)$ es inyectiva en su dominio $\mathbb{D}$ si $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$.

Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas. Una función es inyectiva si la grafica de la función respecto de y se intersecta en un solo punto.



Función no inyectiva



Función inyectiva

Nota. Si la función es inyectiva en el dominio $\mathbb{D}$ y tiene rango $\mathbb{R}$, entonces la función inversa es inyectiva y tiene como dominio $\mathbb{R}$ y como rango $\mathbb{D}$.

Algunas funciones tienen sus inversas con nombre propio como:

Función	$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	Inversa	$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$
exp	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	ln	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
sin	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$	arcsin	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
cos	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$

En general la inversa se denota como f^{-1}. El contexto explica que no se trata de la función elevada a la menos 1.

Método para determinar la función inversa.

1) Calcular los puntos críticos.

2) Determinar un intervalo de monotonía.

3) Escribir la ecuación $y = f(x)$ y despejar x apropiadamente en un intervalo donde f es estrictamente monótona.

Derivada de la función inversa.

Si $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son funciones de forma que f^{-1} es la inversa de la función f en dominios apropaidos. Es decir se cumple:

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f\left(f^{-1}(x)\right) = x \\ f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = x \end{aligned}$$

Se tiene que por regla de la cadena:

$\left[f\circ f^{-1}(x)\right]' = \left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]' = f'\left(f^{-1}(x)\right)\left[f^{-1}(x)\right]'$. y como $\left[f\circ f^{-1}(x)\right]' = [x]' = 1$. Despejando $\left[f^{-1}(x)\right]'$ se tiene

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Que es una fórmula alternativa para calcular la deriva de la inversa.
Por ejemplo.
$[\exp x]' = \exp x$.
Se tiene $[\ln x]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, donde $f' = \exp$ y $\ln$ es la inversa de $\exp$. Sustituyendo,
$[\ln x]' = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$. Que coincide con la fórmula de la derivada de $\ln$.
Del ejemplo anterior.
EJEMPLO.
Sea $f(x) = (2x-4)^2 + 3$.
Primera derivada: $f'(x) = 4(2x-4)$.
La función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{2} + 2$, con dominio $[3,\infty)$ y rango $[2,\infty)$.
Usando la fórmula anterior y sustituyende la deriva de f y el valor en la función inversa:

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\sqrt{x-3}}{2}+2\right)} = \frac{1}{4\left(2\left(\frac{\sqrt{x-3}}{2}+2\right)-4\right)} =$$

$\frac{1}{4\left(2\left(\frac{\sqrt{x-3}}{2}+2\right)-4\right)} = \frac{1}{4\left(\sqrt{x-3}+4-4\right)} = \frac{1}{4\sqrt{x-3}}$. Por tanto la deriva es

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{4\sqrt{x-3}}, \text{ con } x \geq 3.$$

Por otro lado en forma directa:
$\left[f^{-1}(x)\right]' = \left[\frac{\sqrt{x-3}}{2}+2\right]' = \left[\frac{\sqrt{x-3}}{2}\right]' + [2]' = \left[\frac{(x-3)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]' = \frac{\frac{1}{2}(x-3)^{\frac{1}{2}-1}}{2} = \frac{1}{4}(x-3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{x-3}}$, con $x \geq 3$.
Ambos métodos conducen al mismo resultado.

Propiedades algebriacas de los logaritmos naturales
Producto: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
Cociente: $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$.
Recíproco: $\ln(1/x) = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x$.
Potencia: $\ln x^y = y \ln x$.