10.8 Series de Taylor y Maclaurin

Definiciones. Sea $f(x)$ una función con derivadas de todos los órdenes en algun intervalo que contenga al punto interior a. Entonces la serie de Taylor generada por f en a es

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

La serie de Maclaurin generada por f es

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k \end{aligned}$$

que corresponde con la serie de Taylor de f en $a = 0$.

Definición. Sea $f(x)$ una función con derivadas hasta el orden n. El polinomio de Taylor de grado n es

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

Ejemplo.

Calcular $\sin(28^\circ)$ por un polinomio de Taylor de grado 3.

RESPUESTA.

Considerando que 30° es $\frac{\pi}{6}$ radianes. Se toma $a = \frac{\pi}{6}$.

Por regla de tres: 28° es x, como 30° es $\frac{\pi}{6}$. O sea $x = \frac{28\left(\frac{\pi}{6}\right)}{30} = \frac{7}{45}\pi$.

El sin y el cos en $\frac{\pi}{6}$, son fáciles de estimar de un triángulo equilatero de lado 1.

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ y $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

La diferencia $(x-a)$ con $x = \frac{7}{45}\pi$ y $a = \frac{\pi}{6}$ es $\left(\frac{7}{45}\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{90}\pi$

El polinomio de Taylor de sin en $a = \frac{\pi}{6}$, sustituyendo las derivadas en $\frac{\pi}{6}$ y $\left(\frac{7}{45}\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{90}\pi$ es

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{7}{45}\pi\right) &= \sin(\frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{6})\left(-\frac{1}{90}\pi\right) - \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{2!}\left(-\frac{1}{90}\pi\right)^2 - \frac{\cos(\frac{\pi}{6})}{3!}\left(-\frac{1}{90}\pi\right)^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{90}\pi\right) - \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(-\frac{1}{90}\pi\right)^2 - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{6}\left(-\frac{1}{90}\pi\right)^3 \\ &= 0.5 - \frac{1}{180}\sqrt{3}\pi - \frac{1}{32\,400}\pi^2 + \frac{1}{8748\,000}\sqrt{3}\pi^3 \\ & \quad 0.5 - 0.030\,229\,989\,4 - 3.\,046\,174\,198 \times 10^{-4} + 6.\,139\,054\,248 \times 10^{-6} \\ &\approx 0.469\,471\,532\,2 \end{aligned}$$

El resultado por calculadora es $\sin\left(\frac{7}{45}\pi\right) = 0.469\,471\,562\,8$. Note que la diferencia entre el resultado del polinomio de Taylor de grado 3 y el obtenido por calculadora es muy pequeña

$$|0.469\,471\,532\,2 - 0.469\,471\,562\,8| = 3.\,06 \times 10^{-8}.$$

Los polinomios de Taylor son muy importantes porque permiten calcular funciones mediante aproximaciones por polinomios.