10.8 Series de Taylor y Maclaurin
Definición. Sea $f(x)$ una función con derivadas hasta el orden n. El polinomio de Taylor de grado n es

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

Ejemplo.
Calcular $(\sin(117°))^3$ por un polinomio de Taylor de grado 3.
RESPUESTA.
Tomando $f(x) = \sin(x)$, $g \circ f(x) = (\sin(x))^3$.
Se derrolla el polinomio de Taylor para $\sin(x)$.
Como $180° - 117° = 63°$, se toma $a = \frac{\pi}{3}$.
Por regla de tres: $63°$ es x, como $60°$ es $\frac{\pi}{3}$. O sea $x = \frac{63\left(\frac{\pi}{3}\right)}{60} = \frac{7}{20}\pi$.
El sin y el cos en $\frac{\pi}{3}$, son fáciles de estimar de un triángulo equilatero de lado 1.
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) . = \frac{1}{2}$.
La diferencia $(x-a)$ con $x = \frac{7}{20}\pi$ y $a = \frac{\pi}{3}$ es $\left(\frac{7}{20}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{60}\pi$.
El polinomio de Taylor de sin en $a = \frac{\pi}{3}$, sustituyendo las derivadas en $\frac{\pi}{3}$ y $\left(\frac{7}{20}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{60}\pi$ es
$\sin(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3})\left(\frac{1}{60}\pi\right) - \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{2!}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^2 - \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{3!}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^3 = 0.891\,006\,251\,4$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{7}{20}\pi\right) &= \sin(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3})\left(\frac{1}{60}\pi\right) - \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{2!}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^2 - \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{3!}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{60}\pi\right) - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^2 - \frac{\frac{1}{2}}{6}\left(\frac{1}{60}\pi\right)^3 \\ &= 0.866\,03 + 0.02\,617 - 1.\,187\,128\,908 \times 10^{-3} - 1.\,196\,229\,81 \times 10^{-5} \\ &\approx 0.891\,006 \end{aligned}$$

Por tanto $(\sin(117°))^3 = (0.891\,006)^3 = 0.707\,362\,261\,0$

El resultado por calculadora es $\left(\sin\left(\frac{7}{20}\pi\right)\right)^3 = 0.707\,363\,509\,4$. Note que la diferencia entre el resultado del polinomio de Taylor de grado 3 y el obtenido por calculadora es muy pequeña

$$|0.707\,363\,509\,4 - 0.707\,362\,261\,0| = 1.\,248\,4 \times 10^{-6}$$

Tarea opcional. Cada ejercicio vale 2.5.

Estimar las aproximaciones de las siguientes funciones mediante un polinomio de Taylor de grado 3 en puntos apropiados.

a)
$$\cos^2(33°).$$

b)
$$\sqrt{\sin(137°)}.$$

c)
$$\tan(27°)\cos(27°).$$

d)
$$\sec(55°).$$