Segundo Examen Parcial de Introducción al Cálculo

Profesor Carlos Barrón Romero 19I viernes 28 de junio de 2019

SOLUCION

Justificar todas sus respuestas. Las preguntas del examen suman 10 puntos, contestar todas la preguntas para obtener 10 de calificación.

NOTA. Debido a la huelga y los cambios en las fechas de inscripciones, cambios y bajas. Este examen cubre temas de la primera parte que nos faltaron y de la segunda parte con respecto a los examenes departamentales de Introducción al Cálculo. Es decir con este examen nos regularizaremos para corresponda con los exámenes departamentales globales.

1. Sean las funciones :$h(x) = \sin(x^2)$ y $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ con $x \neq 0$. Calcular:

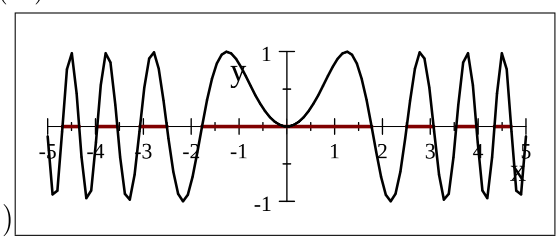
   (a) [0.5] $f \circ h$ y

   (b) [1.5] su dominio.

   RSPUESTAS.

   a) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\sin(x^2)) = \frac{2}{\sqrt{\sin(x^2)}}$.

   b) El $D_{f\circ h}$ se determina de las condiciones que impone el divisor $\sqrt{\sin(x^2)}$. Las cuales son $\sqrt{\sin(x^2)} \neq 0$ y $\sin(x^2) \geq 0$.

   La gráfica de $\sin(x^2)$ 

   Corresponde con la función par $\sin(x^2) = \sin\left((-x)^2\right)$ que es simétrica respecto al eje Y, se anula cuando $x^2 = j\pi, j = 0, 1, 2, \ldots$ O sea $x = \pm\sqrt{j\pi}, j = 0, 1, \ldots$

   Note que $\sin(x^2)$ es positivo en los intervalos par a non en el lado positivo del eje X y par non en lado negativo del eje X.

   Por tanto $D_{f\circ g} = \cup_{j=0}^{\infty}(\sqrt{2j\pi}, \sqrt{(2j+1)\pi}) \cup (-\sqrt{(2j+1)\pi}, -\sqrt{2j\pi})$.

2. La función:$d(t) = \begin{cases} t+1 & x \in [0,1), \\ t^2+1 & x \in [1,2), \\ t^3-3 & x \in [2,4]. \end{cases}$ describe la distancia recorrida de una partícula en función del tiempo. Determinar:

   (a) [0.5] Dominio.

   (b) [0.5] Rango.

   (c) [1.0] Bosquejar la gráfica.

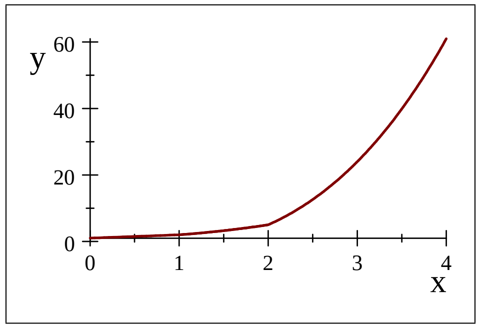
   (d) [1.0] Calcular la tasa de cambio entre $t = 3$ y $t = 1.5$.

   (e) [0.5] Calcular la tasa de cambio instantánea en el punto $t = 0.5$.

   (f) [0.5] Explicar en que intervalo ocurren la mayores tasas de cambio promedio.

   RESPUESTAS.

   a) De la definición se obtiene $D_d = [0, 4] = [0, 1) \cup [1, 2) \cup [2, 4]$.

c) El bosquejo de d es 

b) El $R_d = [1, 4^3 - 3] = [1, 61]$.

d) $T_{t=3,t=1.5} = \frac{d(3)-d(1.5)}{3-1.5} = \frac{\left(3^3-3\right)-\left(1.5^2+1\right)}{1.5} = \frac{27-3-2.25-1}{1.5} = \frac{20.75}{1.5} = 13.833$.

e) La tasa de cambio instantanea en el intervalo $[0, 0.5)$ corresponde con la pendiente de la recta $t+1$ por tanto es 1.
Otra forma $\lim_{t\to 0.5} \frac{d(t)-d(0.5)}{t-0.5} = \lim_{t\to 0.5} \frac{(t+1)-(0.5+1)}{t-0.5} \lim_{t\to 0.5} \frac{t-0.5}{t-0.5} = 1$.

f) En el intervalo $[2, 4]$ ya que corresponde con la función $t^3 - 3$ que crece más rápido que las funciones de los otros intervalos.

3. Sea la función:$g(x) = \begin{cases} \cos(x) + 2 & x \in [-2, 0), \\ -3x + a & x \in [0, 2]. \end{cases}$.

   (a) [0.5] Calcular la constante a para que la función g sea continua.

   (b) [0.5] Calcular $\lim_{x\to 1} (g(x) f(x))$, donde $f(x) = 3\frac{\sin(\pi x^3)}{\pi x^3}$.
   RESPUESTAS.
   a) La continuidad se debe tener en $x = 0$. Se tiene que $\cos(0) + 2 = -3(0) + a$. Por tanto $a = 3$.
   b) Por ser funciones continuas en $x = 1$ se tiene que
   $\lim_{x\to 1} (g(x) f(x)) = \lim_{x\to 1} g(x) \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (-3x+3) \lim_{x\to 1} \left(3\frac{\sin(\pi x^3)}{\pi x^3}\right) =$
   $(-3(1)+3)\left(3 \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right)\right)$, con el cambio de variable $\theta = \pi x^3$ con πx^3 muy pequeño,
   $(0)\,3 = 0$.

4. Para la función:$f(x) = \frac{\cos(\pi x)+x-2}{\pi x}$, calcular:

   (a) [0.5] Dominio.

   (b) [0.5] Rango.

   (c) [1.5] Determinar sus asíntotas verticales u horizontales.

   (d) [1.0] Bosquejar la gráfica incluyendo las asíntotas.
   RESPUESTA.
   a) $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Porqué no se puede dividir entre 0.
   b) El $R_f = (-\infty, \infty)$ porqué toma todos los valores reales incluyendo $\frac{1}{\pi}$ porqué oscila alrededor de él.
   c) Tiene una asíntota vertical en 0 porqué:
   $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(\pi x)+x-2}{\pi x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(\pi x)-1+x-1}{\pi x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(\pi x)-1}{\pi x} + \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\pi x} + \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\pi x} =$
   $0 + \frac{1}{\pi} + \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\pi x} = \infty$.
   $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\pi x)+x-2}{\pi x} \lim_{x\to 0'^+} \frac{\cos(\pi x)-1+x-1}{\pi x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\pi x)-1}{\pi x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\pi x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\pi x} =$
   $0 + \frac{1}{\pi} + \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\pi x} = -\infty$.

Note que no existe $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\pi x)+x-2}{\pi x}$ porque los límites laterales son distintos. La asíntota es la línea verde en la gráfica del inciso d.

Por otro lado, tiene una asíntota horizontal en $\frac{1}{\pi}$ (línea azul en la gráfica del inciso d) ya que:

$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\pi x)+x-2}{\pi x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\pi x)}{\pi x} + \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\pi x} + \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\pi x} = \frac{1}{\pi}$.

Note que $0 = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\pi x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\pi x)}{\pi x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi x} = 0$.

$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\pi x} = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\pi x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$.

En forma similar:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(\pi x)+x-2}{\pi x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(\pi x)}{\pi x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\pi x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{\pi x} = \frac{1}{\pi}$.

d) Bosquejo de f