# Tercer Examen Parcial de Introducción al Cálculo

Profesor Carlos Barrón Romero 19I viernes 19 de julio de 2019

SOLUCION

Justificar todas sus respuestas. Las preguntas del examen suman 10 puntos, contestar todas la preguntas para obtener 10 de calificación.

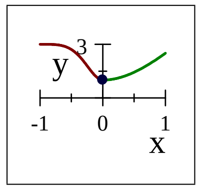
1. [2.0] Sean las funciones :$f(x) = -\cos(\pi x^2 + 2\pi x)) + a$ con $x \in [-1, 0)$ y $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 1$ con $x \in [0, 1]$. Calcular la constante $a$ para que la función sea continua de $[-1, 1]$.

   RESPUESTA

   En $x = 0$, se igualan las partes: $-\cos(\pi x^2 + 2\pi x)) + a = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 1$. O sea,

   $-\cos(\pi (0)^2 + 2\pi (0))) + a = -\frac{1}{2}(0)^3 + 2(0)^2 + 1 \Leftrightarrow -\cos(0) + a = 1 \Leftrightarrow -1 + a = 1$.

   Por tanto $a = 2$.

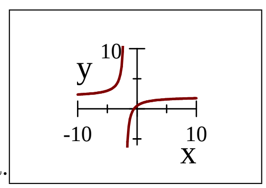
   El resultado se comprueba en la siguiente grafica: 


2. [2.0] La función:$r(t) = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x^2-4)}$. Determinar

   (a) RESPUESTAS.
   Se analizan las discotinuidades de $r(t) = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x^2-4)}$.
   El divisor es $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.
   Por tanto $r(t) = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x^2-4)} = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(2x+1)}{(x+2)}$.
   En $x = 2$ hay una discontinuidad removible.

   (b) Dominio. $D_r = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

   (c) Raices. Del numerador se tiene $2x + 1 = 0$. Por tanto $x = -\frac{1}{2}$ es una raíz.

   (d) Bosquejar la gráfica. 

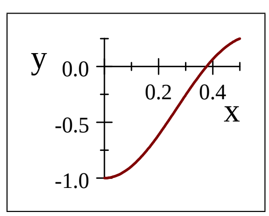

3. [2.0] Dada la ecuación $\sin^2(\pi x) = -x^2 + 1$. Encontrar un intervalo en donde haya al menos una solución.

   RESPUESTA

   Se define la función $f(x) = \sin^2(\pi x) + x^2 - 1$.

   Notemos que $f(0) = -1$ y $f(\frac{1}{2}) = \sin^2(\pi \frac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4}$.

   Por el Teorema de valor intermedio en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ hay al menos una raíz.

   El resultado se comprueba en la siguiente grafica: 


4. [2.0] Dada la ecuación $x^2 = \frac{1}{2}(y + 1)$. Determinar:

   RESPUESTAS.

(a) La ecuación de la recta tangente a la ecuación en el punto del plano XY $(1,1)$.

De la ecuación se despeja $y$. Se tiene $y = 2x^2 - 1$. Se define la función $f(x) = 2x^2 - 1$.

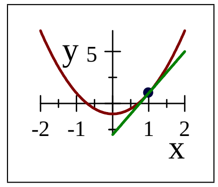
El punto del plano XY satisface la ecuación y a la función $f(1) = 2(1)^2 - 1 = 1$.

La derivada en $x = 1$ proporciona la pendiente de la tangente. Se tiene

$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^2-1-\left(2(1)^2-1\right)}{h} = 4.$

Se tome la ecuación de la recta y se sustityen los valores apropiadamente:$(x - x_0)\, m = y - y_0$. De donde $(x-1)\,4 = (y-1)$.

La ecuación de la tangente es $y = 4x - 3$.

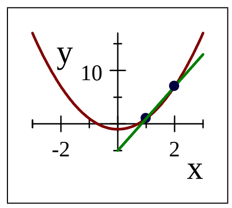
El resultado se comprueba en la siguiente grafica: 


(b) La ecuación de una recta secante a la ecuación en los puntos del plano XY $(1,1)$ y $(2,7)$.

La tasa de cambio es $T_{x=2,x=1} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{7-1}{1} = 6$.

Se tome la ecuación de la recta y se sustityen los valores apropiadamente:$(x - x_0)\, m = y - y_0$. De donde $(x-1)\,6 = (y-1)$.

La ecuación de la tangente es $y = 6x - 5$.

El resultado se comprueba en la siguiente grafica: 


5. [2.0] Dada la función $f(x) = \frac{x}{\left(\frac{2}{3}x+3\right)}$.

Calcular:

RESPUESTAS

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\left(\frac{2}{3}x+3\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\frac{1}{x}}{\left(\frac{2}{3}x+3\right)\frac{1}{x}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{x}\right)} = \frac{3}{2}$.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\left(\frac{2}{3}x+3\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\frac{1}{x}}{\left(\frac{2}{3}x+3\right)\frac{1}{x}} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{x}\right)} = \frac{3}{2}$.

c) Las raices de $f$. Se obtiene del numerador, $x = 0$.

d) Las ecuaciones de las asíntotas de $f$. En $x = -\frac{9}{2}$ se tiene una discontinuidad.

$\lim_{x\to-\left(\frac{9}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to-\left(\frac{9}{2}\right)^-} \frac{x}{\left(\frac{2}{3}x+3\right)} = \infty$.

$\lim_{x\to-\left(\frac{9}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to-\left(\frac{9}{2}\right)^+} \frac{x}{\left(\frac{2}{3}x+3\right)} = -\infty$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{9}{2}$.

El resultado se comprueba en la siguiente grafica: