UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – AZCAPOTZALCO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Examen Global de Introducción al Cálculo

Trimestre 19I VESPERTINO

SOLUCION
El examen global consta de los problemas marcados con $\bigstar$.
Primera Parte

1.- Resolver

a) $-x^2+20 \le x^2+3x \Leftrightarrow$
$0 \le 2x^2+3x-20$.
RESPUESTA $(-\infty,-4] \cup \left[\frac{5}{2},\infty\right)$.

b) $\frac{2-x}{3-4x} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{2-x}{3-4x}-2 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2-x-2(3-4x)}{3-4x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2-x-6+8x}{3-4x} \ge 0 \Leftrightarrow$
$\frac{-4+7x}{3-4x} \ge 0$.
RESPUESTA $\left[\frac{4}{7},\frac{3}{4}\right)$.

2.- $\bigstar$ (10%) Considere las funciones $f(x)=\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-1}, g(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$ y $h(x)=\sqrt{|x|-4}$

a) Determinar sus dominios.

b) Determinar las funciones $\frac{f}{h}$ y $(g \circ h)$ y sus dominios.

RESPUESTAS

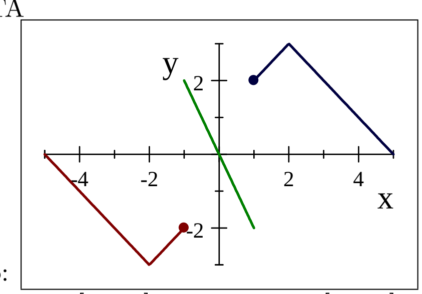
a)
$D_f=[-5,1)\cup(1,5]$. Ya que $25-x^2 \ge 0$ y $x \ne 1$.
$D_g=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$. Tiene una discontinuidad en $x=-1$ del divisor $x+1$.
$D_h=(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$. Ya que $|x|-4 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \ge 4 \Leftrightarrow x \le -4$ o $x \ge 4$..

b)
$\left(\frac{f}{h}\right)(x)=\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-1}}{\sqrt{|x|-4}}=\frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{|x|-4}(x-1)}$. $D_{\frac{f}{h}}=[-5,-4]\cup[4,5]=([-5,1)\cup(1,5])\cap(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$.

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g\left(\sqrt{|x|-4}\right)=\frac{\left(\sqrt{|x|-4}\right)^2+1}{\left(\sqrt{|x|-4}\right)+1}=\frac{|x|-3}{\left(\sqrt{|x|-4}\right)+1}$. $D_{g\circ h}=(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$.

3.- $f(x)=\begin{cases} |x+2|-3 & x\in -5 \le x \le -1 \\ -2x & -1<x<1 \\ -|x-2|+3 & 1 \le x \le 5 \end{cases}$

RESPUESTA

a) Bosquejo: 

b) Dominio $D_f=[-5,5]$. Rango $R_f=[-3,3]$.
Raíces: $x=-5,0,5$.
Paridad: Es impar $f(-x)=-f(x)$.
c) Intervalos donde $f(x)>0$. $(-1,0)\cup[1,5)$.

4.-$\bigstar$ (15%) La suma del perimetro de un circulo y un triángulo equilatero es 20 mts. Expresar el área del triángulo en funión del radio.

RESPUESTA

Se tiene $20=2\pi r+3l$ donde r es el radio del circulo y l es el lado del triángulo equilatero.
$l=\frac{20-2\pi r}{3}$.

El área del triángulo es $A=\frac{l*a}{2}$ donde l es la base y a es la altura. Por se un Triángulo equilateror se tiene $a=\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}l^2}=\frac{\sqrt{3}l}{2}$.

O sea $A=\frac{l*\frac{\sqrt{3}l}{2}}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{3}l^2$.

Finalmente $A\left(r\right)=\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(\frac{20-2\pi r}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\pi r-10\right)^2$.

Segunda Parte

1.0 ★ (15%) Calcular los siguientes límites:

RESPUESTAS

a) $\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{1-\sqrt{4x-7}}; h=x-2$ o sea $x=h+2$;

$\lim_{h\to 0}\frac{3h}{1-\sqrt{4(h+2)-7}}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{1-\sqrt{4h+1}}\frac{1+\sqrt{4h+1}}{1+\sqrt{4h+1}}=\lim_{h\to 0}\frac{3h\left(1+\sqrt{4h+1}\right)}{1-4h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{3h\left(1+\sqrt{4h+1}\right)}{-4h}=$

$\lim_{h\to 0}\frac{3\left(1+\sqrt{4h+1}\right)}{-4}=-\frac{3(2)}{4}=-\frac{3}{2}$.

Comprobación Rela De la Hôpital $\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}=\lim_{x\to 2}\frac{3}{-\frac{2}{\sqrt{4x-7}}}=\lim_{x\to 2}-\frac{3}{2}\sqrt{4x-7}=-\frac{3}{2}$.

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\csc(x)-\cot(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin(x)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\sin x}$;

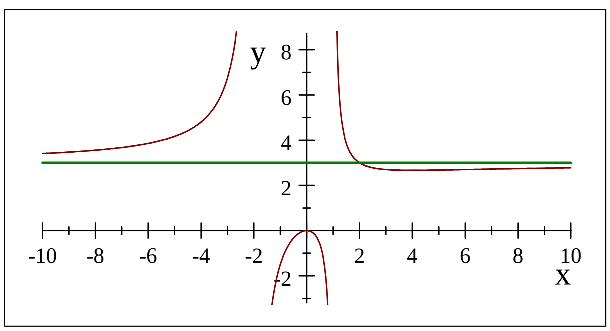
$\approx\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$.

c)$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{2x^2-x+1}{x^2+1}}=\lim_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{2}$

2.0 Para la función $f\left(x\right)=\frac{3x^2}{x^2+x-2}$. Determinar:

c) Bosquejo



a) Dominio y Rango. $x^2+x-2=0$, Raices $x=1,-2$.

$D_f=(-\infty-2)\cup(-2,1)\cup(1,\infty)$.

$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2}{x^2+x-2}=3$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+x-2}=3$

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{9}=2.7778$.

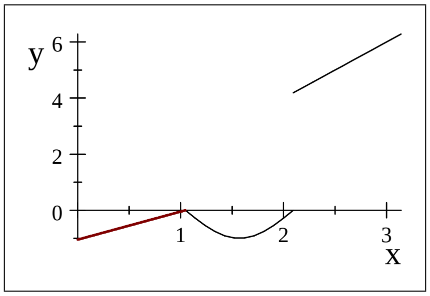
$R_f=(-\infty,0]\cup[\frac{25}{9},\infty)$.

b) Ceros o raices $x=0$.

Asíntota horizontal: $y=3$

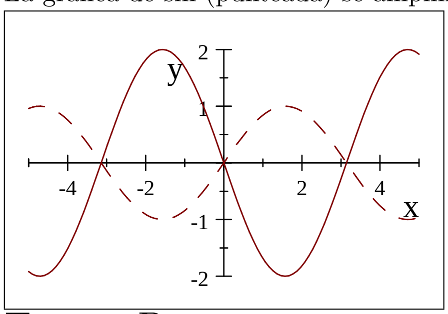
Asíntota verticales: $x=-2$; $x=1$.

3.0 Para la función $h\left(x\right)=\begin{cases} x-\frac{\pi}{3} & 0<x\leq\frac{\pi}{3} \\ \sin\left(3x\right) & \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3} \\ 2x & \frac{2\pi}{3}\leq x<\pi \end{cases}$



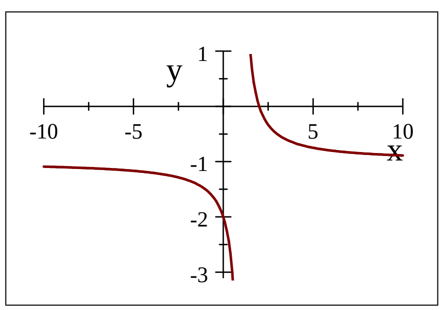
Determinar los límites:
RESPUESTAS
a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} h(x) = 0$
b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+} h(x) = 0$
c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} h(x) = 0$, por a) y b).
d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} h(x) = \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

4. ★ (20%) Esbozar la grafica de $f(x) = 2\sin(x+\pi)$.
La grafica de sin (punteada) se amplifica por 2 y se recorre π.



Tercera Parte

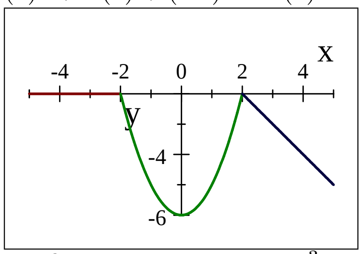
1.0 ★ (20%) Sea la función: $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2+x-2}$. Obtener:
RESPUESTA
Como $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2+x-2} = \frac{(2-x)(2+x)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2-x}{x-1}$
Bosquejo



Dominio:$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
Ceros: $x = 2$.
Intervalos de continuidad: $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$
Clasificar discontinuidades: En $x = 2$ tiene una discontinuidad removible. $x = 1$ es una discontinuidad.

2.0 ★ (10%) Para la función $f(x) = \begin{cases} ax-2 & x \le -2 \\ x^2+ax+b & -2 < x < 2 \\ -x & 2 \le x \end{cases}$
Encontrar a y b para que la función sea continua.
RESPUESTA
En $x = -2$,
$a(-2) - 2 = (-2)^2 + a(-2) + b$

En $x=2$
$(2)^2+a\,(2)+b=-\,(2)\,.$
Se tiene
$-2a-2=4-2a+b \Leftrightarrow -2a-2-(4-2a+b)=0 \Leftrightarrow -6-b=0$. Por tanto $b=-6$.
Por otro lado
$(2)^2+a\,(2)+(-6)=-\,(2) \Leftrightarrow 4+2a-6=-2$. Por tanto $a=0$.



3.0 Verficar que la ecuación $x^3+2x+1=0$ tiene solución en el intervalo $[-2,1]$.
RESPUESTA.
Sea la función $g(x)=x^3+2x+1$.
$g(-2)=-11.0$ y
$g(1)=4.0$. Por el teorema del valor intermedio hay una raiz en dicho intervalo.

4.0 ★ (10%) Sea la función $f\,(x)=\sqrt{x^2-3x}$
a) calcular su derivada en $x=-1$
RESPUESTA
$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(-1+h)^2-3(-1+h)}-\sqrt{(-1)^2-3(-1)}}{h}\,\frac{\sqrt{(-1+h)^2-3(-1+h)}+\sqrt{(-1)^2-3(-1)}}{\sqrt{(-1+h)^2-3(-1+h)}+\sqrt{(-1)^2-3(-1)}}=$
$\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-3(-1+h)-\left((-1)^2-3(-1)\right)}{h\sqrt{(-1+h)^2-3(-1+h)}+\sqrt{(-1)^2-3(-1)}}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h+h^2-3h}{h\sqrt{(-1+h)^2-3(-1+h)}+\sqrt{(-1)^2-3(-1)}}=$
$\lim_{h\to 0}\frac{-2+h-3}{\sqrt{(-1+h)^2-3(-1+h)}+\sqrt{(-1)^2-3(-1)}}=\lim_{h\to 0}\frac{-5+h}{\sqrt{(-1+h)^2-3(-1+h)}+\sqrt{(-1)^2-3(-1)}}=\frac{-5}{2\sqrt{1+3}}=-\frac{5}{4}.$
$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-3x}\right)_{x=-x}=\frac{1}{2}\frac{2x-3}{\sqrt{x(x-3)}}=\frac{1}{2}\frac{2(-1)-3}{\sqrt{(-1)((-1)-3)}}=-\frac{5}{4}.$
b) Hallar la ecuación de la tangente.
RESPUESTA
$f(-1)=\sqrt{(-1)^2-3\,(-1)}=2$
El punto $(x_0,y_0)=(-1,2)$.
La ecuación de la recta $m=\frac{y-y}{x-{}_{x0}}$ se tiene:
$-\frac{5}{4}=\frac{y-2}{x-(-1)} \Leftrightarrow -\frac{5}{4}\,(x+1)=y-2 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}+2=y$. Por tanto
$y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$