UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-AZC

Examen Global de Introducción al Cálculo

Carlos Barrón Romero Trimestre 19I

Nombre:____________________________________

Matrícula:_____________

El examen global consta de los problemas marcados con ★. Quienes recuperen una parte del curso deberán resolver todos los problemas de esa parte. Todas las respuestas deben tener su desarrollo o justificación.

Primera Parte

1. Resolver las siguientes desigualdades: (a) $\frac{3}{5}x^2+\frac{2}{5}x \geq 1$. (b) $\dfrac{2x-3}{x-1} \leq 0$.

2. ★ (15%) Sean las funciones: $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ y $h(x) = 2(x-4)^2$.
   (a) Determinar dominio de $f(x)$ y dominio de $h(x)$.
   (b) Determinar $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ y $(f \circ h)(x)$, sus dominios y raíces.

3. Sea la función: $z(x) = \begin{cases} -\sqrt{4x^2-36} & \text{si } x \in (-4,-3], \\ \dfrac{16-x^2}{4} & \text{si } |x| \leq 3, \\ -\sqrt{4x^2-36} & \text{si } x \in [3,4). \end{cases}$
   (a) Realizar un bosquejo de la gráfica y determinar su dominio.
   (b) Determinar: las raíces o ceros, la paridad, el rango, los intervalos de monotonía y los intervalos donde $f(x)$ es menor o igual a cero y donde $f(x)$ es mayor a cero.

4. ★ (15%) Se va a construir un tanque de acero para almacenar gas con capacidad de 30π pie^3. La forma del tanque es un cilindro circular recto con 2 semiesferas en los extremos. Expresar la superficie total del tanque en función del radio de las semiesferas. La fórmula del volumen de una esfera es $V(r) = \frac{4\pi}{3}r^3$ y la fórmula del área de una esfera es $A(r) = 4\pi r^2$ donde r es el radio de la esfera.

Segunda Parte

1. ★ (15%) Calcular los siguientes límites: (a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(3x+1)(x-1)}{|x-1|}$. (b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\tan^2(h)}{h\sin(h)}$.
   (c) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2}\right)$.

2. ★ (15%) Sea la función: $g(\theta) = -4\text{sen}(\pi\theta) + 1$.
   (a) Realizar un bosquejo de su gráfica.

(b) Determinar su dominio, amplitud y periodo.

3. Sea la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 2x^2}$. Obtener:

   (a) Dominio, raíces o ceros y la paridad de la función.
   (b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales.
   (c) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.
   (d) Esbozo de la gráfica de la función.
   (e) Rango, los intervalos de monotonía e intervalos donde $f(x) \leq 0$.

Tercera Parte

1. ★ (25%) Sea la función: $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{2x^2 - 2x - 12}$. Obtener:

   (a) Dominio, raíces o ceros y la paridad de la función.
   (b) Los intervalos de continuidad y clasificar sus discontinuidades.
   (c) Esbozo de la gráfica de la función.
   (d) Rango, los intervalos de monotonía y los intervalos donde $f(x) \leq 0$.

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} & \text{si } x < -1, \\ 2cx + d & \text{si } -1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 4x - 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$ Obtener:

   (a) Los valores de c y d para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

3. Encontrar un intervalo de longitud $\frac{1}{2}$ donde la ecuación: $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ tenga como única raíz a $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

4. ★ (15%) Sea la curva $2y^2 + 2y = x^2$.

   (a) Encontrar la ecuación de la recta secante que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(2,1)$.
   (b) Determinar la tasa de cambio instantanea en $x = 1$ y determinar la ecuación de la tangente en $x = 1$.