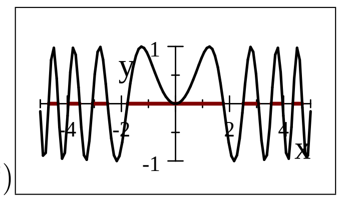
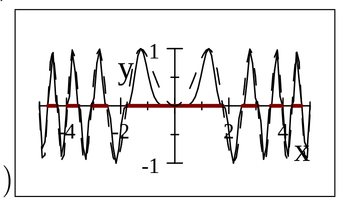
Tarea 4. Introducción al Cálculo
Profesor: Carlos Barrón Romero
SOLUCION
Composición. Función de una situación real. Límites.
Justificar todas sus respuestas.

1. Sean las funciones :$g(x) = \sin(x^2)$ con $x \in [0, \pi]$ y $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^3}}$ con $x \neq 0$. Definir las funciones, indicando su dominio.

   (a) gf
   Respuesta.
   $(gf)(x) = g(x)f(x) = \frac{2\sin(x^2)}{\sqrt{x^3}}$. Considerando lo dominios dados de g y f se tiene que $D_{fg} = (0, \pi]$.

   (b) $f \circ g$
   Respuesta.
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin(x^2)) = \frac{2}{\sqrt{(\sin(x^2))^3}} = \frac{2}{\sqrt{\sin^3(x^2)}}$. El dominio más grande se obtiene considerando el termino $\frac{1}{\sqrt{\sin^3(x^2)}}$. Esta consideración tiene dos restricciones $\sqrt{\sin^3(x^2)} \neq 0$ y $\sin^3(x^2) > 0$. La gráfica de $\sin(x^2)$ 

   Corresponde con la función par $\sin(x^2) = \sin\left((-x)^2\right)$ que es simétrica respecto al eje Y.

   La gráfica de $\sin^3(x^2)$ 

   Note que se anula cuando $x^2 = j\pi, j = 0, 1, 2, \ldots$ O sea $x = \pm\sqrt{j\pi}, j = 0, 1, \ldots$
   Además $\sin(x^2)$ y por tanto $\sin^3(x^2)$ son positivos en los intervalos par a non en el lado positivo y non par en el lado negativo.
   Por tanto $D_{f\circ g} = \cup_{k=0}^{\infty}(\sqrt{2k\pi}, \sqrt{(2k+1)\pi}) \cup (-\sqrt{(2k+1)\pi}, -\sqrt{2k\pi})$

   (c) $g \circ f$
   Respuesta.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(\frac{2}{\sqrt{x^3}}) = \sin((\frac{2}{\sqrt{x^3}})^2) = \sin(\frac{4}{|x^3|})$.
   Por tanto $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (d) $f - g$
   Respuesta.
   $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{x^3}} - \sin(x^2)$. Considerando lo dominios dados de g y f se tiene que $D_{f-g} = (0, \pi]$.

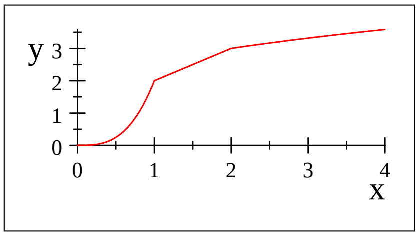
2. La función:$d(t) = \begin{cases} 2t^3 & x \in [0, 1), \\ t + 1 & x \in [1, 2), \\ \sqrt{t} + (3 - \sqrt{2}) & x \in [2, 4]. \end{cases}$ Describe la distancia recorrida de una partícula en función del tiempo. Encontrar.

   RSPUESTAS.

(a) Dominio. $D_d = [0,4]$.

(b) Rango. $R_d = \left[0, 5-\sqrt{2}\right]$.

(c) Bosquejar la gráfica.



(d) Calcular la tasa de cambio (T) entre $t=3$ y $t=1$.

$\mathrm{T}_{t=3yt=1} = \frac{d(3)-d(1)}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+\left(3-\sqrt{2}\right)-2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 0.658\,92.$

(e) Calcular la tasa de cambio instantánea en el punto $t = 1.5$.

$\lim_{t\to 1.5} \frac{d(t)-d(1.5)}{t-1.5} = \lim_{t\to 1.5} \frac{t+1-2.5}{t-1.5} = \lim_{t\to 1.5} \frac{t-1.5}{t-1.5} = 1.0$

(f) Explicar en que intervalo ocurren la mayores tasas de cambio promedio.

Por la verticalidad o sea el crecimiento ocurren en $[0,1)$.

(g) Explicar si existe la tasa de cambio instantánea en los puntos $t=0, t=1, t=2, t=3$ y $t=4$.

Por la definición del dominio no existe en $t=0$.Por el cambio brusco o esquinas no existe en $t=1, t=2$ y $t=4$.

En $t=3$ existe y corresponde con la derivada de la función continua $\sqrt{t}+\left(3-\sqrt{2}\right)$.

(h) Calcular la tasa de cambio instantánea en el punto $t = 3.0$.

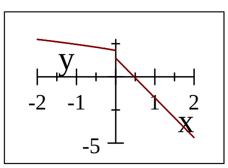
$\lim_{t\to 3} \frac{d(t)-d(3)}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{\sqrt{t}+\left(3-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}+\left(3-\sqrt{2}\right)\right)}{t-3}$cambio de variable $h = t-3$.

$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h}+\left(3-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}+\left(3-\sqrt{2}\right)\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{3}}{h}$ aproximación por el Binimio generalizado de Newton

$\approx \lim_{h\to 0} \frac{3^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)3^{-\frac{1}{2}}h+o(h^2)-\sqrt{3}}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)3^{-\frac{1}{2}}h+o(h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{2}\right)3^{-\frac{1}{2}} + o(h) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$

Comprobación $\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ y $\frac{d}{dt}\sqrt{t}|_{t=3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

3. Dada la función:$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4-2x} & x \in [-2,0), \\ -3x+\sqrt{2} & x \in [0,2]. \end{cases}$ y $f(x) = \cos(2\pi x)$. Calcular.

Grafica de $g(x)$ 

(a) $\lim_{x\to 0} \left(g(x) f(x)\right)$.

RESPUESTA. La función $g(x)$ no es continua en $x=0$. No existe el límite.

Otra forma:

$\lim_{x\to 0^-} \left(g(x)f(x)\right) = \lim_{x\to 0^-} g(x) \lim_{x\to 0^-} f(x) = \sqrt{4-2(0)}\cos(2\pi 0) = 2.$

$\lim_{x\to 0^+} \left(g(x)f(x)\right) = \lim_{x\to 0^+} g(x) \lim_{x\to 0^+} f(x) = \left(-3(0)+\sqrt{2}\right)\cos(2\pi 0) = \sqrt{2}.$

Los limites laterares son diferentes, por tanto no existe el límite.

(b) $\lim_{x\to 1} \left(g(x) + f(x)\right)$.

RESPUESTA.

$\lim_{x\to 1} \left(g(x)+f(x)\right) = \lim_{x\to 1} g(x) + \lim_{x\to 1} f(x) = g(1) + f(1) = \left(-3(1)+\sqrt{2}\right) + \cos(2\pi 1) = \sqrt{2} - 2 = -0.585\,786\,437\,6$

4. Dada la función:$g\left(x\right)=\frac{\sin(5\pi x^2)}{\pi x^2}$.Calcular.

   (a) $\lim_{x\to 0} g(x)$.
   RESPUESTA.
   $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\pi x^2)}{\pi x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5\sin(5\pi x^2)}{5\pi x^2}$ Cambio de variable $u = 5\pi x^2 \approx \lim_{u\to 0} \frac{5\sin(u)}{u} = 5$.

   (b) $\lim_{x\to -\infty} g(x)$
   RESPUESTA.
   $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin(5\pi x^2)}{\pi x^2}$. Note que $0 = \lim_{x\to -\infty} \frac{-1}{\pi x^2} \le \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin(5\pi x^2)}{\pi x^2} \le \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\pi x^2} = 0$. Por tanto
   $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$.

   (c) $\lim_{x\to \infty} g(x)$.

   RESPUESTA.
   En forma similar se tiene que $0 = \lim_{x\to \infty} \frac{-1}{\pi x^2} \le \lim_{x\to \infty} \frac{\sin(5\pi x^2)}{\pi x^2} \le \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\pi x^2} = 0$. Por tanto $\lim_{x\to \infty} g(x) = 0$.