Tarea 5. Introducción al Cálculo
Profesor: Carlos Barrón Romero
SOLUCION
Composición. Función de una situación real. Límites. Continuidad. Secante. Tangente.
Justificar todas sus respuestas.

1. Sean las funciones :$g(x) = -2\cos\left(x^2\right) + a$ con $x \in [-\pi, 0)$ y $f(x) = -x^2 + b$ con $x \in [0, \pi]$. Calcular las constantes a y b para que la función sea continua.

   RESPUESTA.

   Se requiere la igualdad $g(x) = f(x)$ en $x = 0$. Por tanto $g(0) = -2\cos\left(0^2\right) + a = f(0) = -0^2 + b$.

   O sea, $-2 + a = b$. Dejando libre a b se tiene $a(b) = b + 2$ como todas las elecciones de b y a.

2. La función:$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{t}} & x \in (0,1), \\ \sqrt[3]{t} & x \in [1,4]. \end{cases}$ Describe el cambio del radio respecto del tiempo en el intervalo $(0, 4]$. Escribir la función volumen de una esfera ($\frac{4}{3}\pi r^3$) usando la función $r(t)$, o sea, determinar la función del volumen de la esfera en función del tiempo $V(t)$. Determinar para $V(t)$:

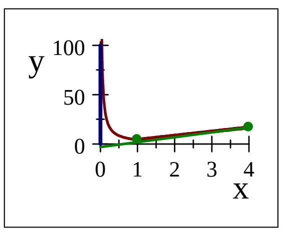
   RESPUESTAS.

   $V(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\frac{1}{t} & x \in (0,1), \\ \frac{4}{3}\pi t & x \in [1,4]. \end{cases}$

   (a) Dominio. $D_V = (0, 4]$.

   (b) Rango. $R_V = [\frac{4}{3}\pi, \infty]$

   (c) Bosquejar la gráfica.

   (d) Calcular la tasa de cambio promedio entre $t = 4$ y $t = 1$. Determinar la ecuación de la secante en dichos puntos y graficarla.
   $T_{t=4,t=1} = \frac{\frac{4}{3}\pi(4) - \frac{4}{3}\pi}{4-1} = \frac{4}{3}\pi$. La ecuación de la secante se obtiene de $T_{t=4,t=1} = \frac{y-1}{x-1}$.
   $\frac{4}{3}\pi = \frac{y-1}{x-1} \iff y - 1 = \frac{4}{3}\pi(x-1) \iff y = \frac{4}{3}\pi(x-1) + 1 = \frac{4}{3}\pi x - \frac{4}{3}\pi + 1$.
   $y = 4.1888x - 3.1888$.Aparece en verde en la gráfica

   (e) Calcular la tasa de cambio instantánea en el punto $t = 1.5$. Determinar la ecuación de la tangente en $t = 1.5$ y graficarla.
   RESPUESTA.
   En ese punto la función $V(t) = \frac{4}{3}\pi t$ es lineal, por lo que su tasa instantanea es su pendiente $\frac{4}{3}\pi$.
   Es la recta verde que aparece en la gráfica.

   (f) Explicar si existe la tasa de cambio instantánea en el punto $t = 1$.
   RESPUESTA.
   $\lim_{t\to 1^-} \frac{\frac{4}{3}\pi\frac{1}{t} - \frac{4}{3}\pi}{t-1} = -\frac{4}{3}\pi$.
   $\lim_{t\to 1^+} \frac{\frac{4}{3}\pi t - \frac{4}{3}\pi}{t-1} = \frac{4}{3}\pi$.
   Como los límites son difrentes no existe la tasa de cambio instantánea en el punto $t = 1$.

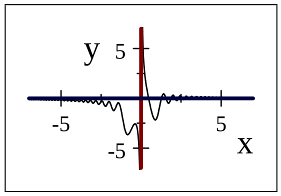
   (g) Determinar si tiene asíntotas verticales u horizontales.
   RESPUESTA.
   Tiene un asintota vertical en $t = 0$. Aparece en azul en la gráfica.

3. Dada la función:$g(x) = \frac{4\cos(\pi x^2)+2x-4}{\pi x^2}$.Calcular.

RESPUESTAS.

(a) Dominio. $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(b) Rango. $D_g = \mathbb{R}$.

(c) Bosquejar la gráfica. 

(d) $\lim_{x\to 0} g(x)$.
Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$.
Y $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$. No existe $\lim_{x\to 0} g(x)$.

(e) $\lim_{x\to -\infty} g(x)$. Note que $0 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{\pi x} - \frac{8}{\pi x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-8}{\pi x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4+2x-4}{\pi x^2} \leq \lim_{x\to-\infty}\frac{4\cos(\pi x^2)+2x-4}{\pi x^2} \leq \lim_{x\to-\infty}\frac{4+2x-4}{\pi x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\pi x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\pi x} = 0$.
Por tanto $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

(f) $\lim_{x\to\infty} g(x)$. En forma similar:
$0 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi x} - \frac{8}{\pi x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-8}{\pi x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4+2x-4}{\pi x^2} \leq \lim_{x\to\infty}\frac{4\cos(\pi x^2)+2x-4}{\pi x^2} \leq \lim_{x\to\infty}\frac{4+2x-4}{\pi x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\pi x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\pi x} = 0$.
Por tanto $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(g) Determinar si tiene asíntotas verticales u horizontales.
Sus asintotas son. Vertical $x = 0$ (linea roja en la gráfica) y horizontal $y = 0$ (linea azul en la gráfica).

(h) Determinar si es par o impar.

Como $g(-x) = \frac{4\cos(\pi(-x)^2)+2(-x)-4}{\pi(-x)^2} = \frac{4\cos(\pi x^2)-2x-4}{\pi x^2} \neq \frac{4\cos(\pi x^2)+2x-4}{\pi x^2} = g(x)$.
Y $g(-x) = \frac{4\cos(\pi(-x)^2)+2(-x)-4}{\pi(-x)^2} = \frac{4\cos(\pi x^2)-2x-4}{\pi x^2} = -\frac{-4\cos(\pi x^2)+2x+4}{\pi x^2} \neq -\frac{4\cos(\pi x^2)+2x-4}{\pi x^2} = -g(x)$.
No es par, ni impar.