UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – AZCAPOTZALCO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Ejemplo de un 1er Examen de Introducción al Cálculo

Profesor Carlos Barrón Romero Trimestre 19O

Soluciones.
Todas las respuestas deben tener un desarrollo o justificación.

1. Determinar el intervalo donde se cumple cada una de las desigualdades:

   (a) $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$. Respuesta: $(-\infty, -1.0] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$.

   (b) $\frac{3-2x}{2x-1} \leq 0$.Respuesta: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

2. Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \text{ y } h(x) = 2x - 4.$$

   (a) Determinar el dominio de f y el dominio de h.

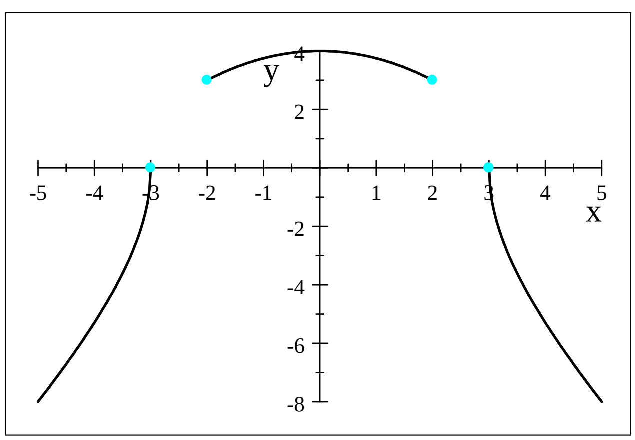
   (b) Determinar $\left(\frac{h}{f}\right)$, $(f \circ h)$, sus dominios y raices.
   RESPUESTAS.
   (a) $D_f = [-4, 4]$ y $D_h = \mathbb{R}$.
   (b) $\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{16-x^2}}$. $D_{\frac{h}{f}} = (-4, 4)$. Tiene una raíz en $x = 2$.
   $(f \circ h)(x) = 2\sqrt{x(4-x)}$. $D_{f\circ h} = [0, 4]$. Sus raíces son 0 y 4.

3. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4x^2 - 36} & \text{si } x \in (-5, -3], \\ \frac{16-x^2}{4} & \text{si } |x| \leq 2, \\ -\sqrt{4x^2 - 36} & \text{si } x \in [3, 5). \end{cases}$$

   (a) Realizar un bosquejo de la gráfica de f y determinar su dominio.

   (b) Determinar: sus raíces o ceros, su paridad, el rango, los intervalos de monotonía y los intervalos donde $f(x)$ es menor o igual a cero y donde $f(x)$ es mayor a cero.
   RESPUESTAS.



   (a) Bosquejo de la gráfica de f

$D_f = (-5, 3] \cup [-2, 2] \cup [3, 5)$.
(b) Las raíces son -3 y 3.
Tiene paridad par.
$R_f = (-8, 0] \cup [3, 4]$.
Intervalos de monotonía: f es creciente de $(-5, 3]$ y $[-2, 0]$ y f es decreciente de $[2, 0]$ y $[3, 5)$.
$f(x)$ es menor o igual a cero en el intervalo $(-5, -3] \cup [3, 5)$.
$f(x)$ es mayor a cero en el intervalo $[-2, 2]$.

4. Se va a construir un tanque de acero para almacenar gas con capacidad de 20π pies^3. La forma del tanque es un cilindro con dos semiesferas en los extremos. Expresar la superficie total del tanque en función del radio de las semiespferas. Ayuda: La fórmula del volumen de una esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y la fórmula del área de una esfera es $A(r) = 4\pi r^2$ donde r es el radio de la esfera.

   Respuesta.

   La función de la superficie total es $S_T(r) = \frac{4\pi}{3}\left(r^2 + \frac{30}{r}\right)$.