Tarea 7. Introducción al Cálculo
Profesor: Carlos Barrón Romero
El objetivo es resolver problemas de desigualdades y realizar una comprobación de su solución. Es decir, Su trabajo debe incluir por escrito el desarrollo lógico-algebraico y un dibujo de un bosquejo gráfico que compruebe la veracidad de su resultado.

1. Dada la desigualdad:
$$\frac{-2x-3}{\frac{x}{3}+\sqrt{2}} \leq 0.$$
Determinar el intervalo que la satisface.

RESPUESTA.

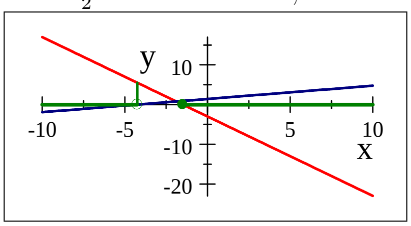
Tenemos dos casos: a) $(-2x-3 \geq 0) \wedge \left(\frac{x}{3}+\sqrt{2}\right) < 0$ y b) $(-2x-3 \leq 0) \wedge \left(\frac{x}{3}+\sqrt{2} > 0\right)$.

Para el caso a) $(-2x-3 \geq 0) \wedge \left(\frac{x}{3}+\sqrt{2} < 0\right) \Longleftrightarrow (-2x \geq +3) \wedge \left(\frac{x}{3} < -\sqrt{2}\right) \Longleftrightarrow$ $\left(x \leq -\frac{3}{2}\right) \wedge \left(x < -3\sqrt{2}\right)$. Que corresponde con la interseción de los intervalos $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cap \left(-\infty, -3\sqrt{2}\right) = \left(-\infty, -3\sqrt{2}\right)$.

Para el caso b) $(-2x-3 \leq 0) \wedge \left(\frac{x}{3}+\sqrt{2} > 0\right) \Longleftrightarrow (-2x \leq 3) \wedge \left(\frac{x}{3} > -\sqrt{2}\right) \Longleftrightarrow (-2x \leq 3) \wedge \left(\frac{x}{3} > -\sqrt{2}\right) \Longleftrightarrow$ $\left(x \geq -\frac{3}{2}\right) \wedge \left(x > -3\sqrt{2}\right)$.Que corresponde con la interseeción de los intervalos $[-\frac{3}{2}, \infty] \cap \left(-3\sqrt{2}, \infty\right) = [-\frac{3}{2}, \infty]$.

Por lo que la solución es $\left(-\infty, -3\sqrt{2}\right) \cup \left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Note que lo que se quiere determinar es cuando el cociente de las rectas es negativo. A la izquierda de $x = -3\sqrt{2}$ la recta roja $(y = -2x-3)$ es positiva y la recta zul $(y = \frac{x}{3}+\sqrt{2})$ es negativa. Por otro lado, a partir de $x = -\frac{3}{2}$ hacia la derecha, la recta roja $(y = -2x-3)$ es negativa y la recta zul $(y = \frac{x}{3}+\sqrt{2})$ es positiva.



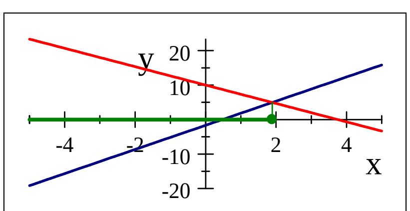
La gráfica muestra en color verde la solución correspondiente en la zona donde las rectas toman valores en el eje Y con diferente signo.

2. Dada la desigualdad:
$$3\frac{1}{2}x - \frac{5}{3} \leq -\frac{8}{3}x + 10.$$
Determinar el intervalo que la satisface.

RESPUESTA.

Se tiene la condición $3\frac{1}{2}x - \frac{5}{3} \leq -\frac{8}{3}x + 10 \Longleftrightarrow 3\frac{1}{2}x + \frac{8}{3}x \leq 10 + \frac{5}{3} \Longleftrightarrow$ $\left(\frac{7}{2}+\frac{8}{3}\right)x \leq \frac{30}{3}+\frac{5}{3} \Longleftrightarrow \left(\frac{37}{6}\right)x \leq \frac{35}{3} \Longleftrightarrow x \leq \frac{35}{3}\frac{6}{37} = \frac{70}{37} \approx 1.891\,9$.

La solución es $\left(-\infty, \frac{70}{37}\right]$.



La gráfica muestra cuando la recta (roja) de la derecha de la desigualdad $(y = -\frac{8}{3}x + 10)$ toma valores en el Y de mayor o igual valor a los de la recta (azul) de la izquierda de la desigualdad. Lo que corrobora que el intervalo solución es $\left(-\infty, \frac{70}{37}\right]$.

3. Dada la desigualdad:
$$10x^2 - 9x - 2 \leq 0.$$
Determinar el intervalo que la satisface.

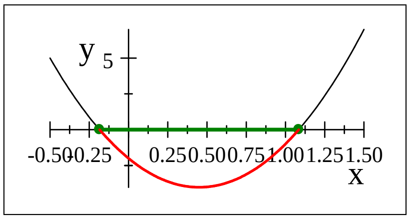
RESPUESTA.

El discriminante es $(-9)^2 - 4(10)(-2) = 161 > 0$. por lo que tiene raices reales.

$x_0 = \frac{-(-9)+\sqrt{161}}{2(10)} = \frac{1}{20}\sqrt{161} + \frac{9}{20} \approx 1.0844$.

$x_1 = \frac{-(-9)-\sqrt{161}}{2(10)} = \frac{9}{20} - \frac{1}{20}\sqrt{161} \approx -0.18443$.

Es una parabola que abre hacia $+Y$. El intervalo solución es $\left[\frac{9}{20} - \frac{1}{20}\sqrt{161}, \frac{1}{20}\sqrt{161} + \frac{9}{20}\right]$.



La gráfica muestra cuando la cuadrática ($y = 10x^2 - 9x - 2$) en color rojo, toma valores menores o iguales a 0. El intervalo solución tiene color verde y corresponde con el resultado obtenido.

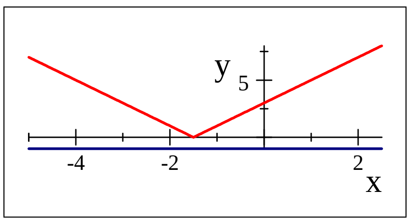
4. Dada la desigualdad:

$$|-2x - 3| \leq -1.$$

Determinar el intervalo que la satisface.

RESPUESTA.

La función valor absoluto no puede ser negativa. por lo que la solución es ϕ.



La gráfica muestra en rojo la parte de $|-2x - 3|$ y en azul la recta constante $y = -1$.

Claramente no hay valores de $|-2x - 3|$ por debajo de la recta azul.

5. Dada la desigualdad:

$$|-10x - 5| \geq 8.$$

Determinar el intervalo que la satisface.

RESPUESTA.

Se tienen dos casos a). $-10x - 5 \geq 0$ y b) $(-10x - 5) < 0$.

Para a) se tiene $-10x - 5 \geq 8 \Leftrightarrow -10x \geq 13 \Leftrightarrow x \leq -\frac{13}{10}$ que corresponde al intervalo $(-\infty, -\frac{13}{10}]$.

Para b) se tiene $10x + 5 \geq 8 \Leftrightarrow 10x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{10}$que corresponde al intervalo $[\frac{3}{10}, \infty)$.

El intervalo solución es $(-\infty, -\frac{13}{10}] \cup [\frac{3}{10}, \infty)$.

La siguiente gráfica muestra cuando la expresión valor absoluto de $|-10x - 5|$ en color rojo, toma valores mayores o iguales a la recta constante $y = 8$ de color azul. El intervalo solución tiene color verde y corresponde con el intervalo solución.