1112042 Introducción al Cálculo GRUPO CAT83 TRIMESTRE 23P
Lunes 14 de agosto de 2023. Sesión 6

Clase de anterior

Tarea opcional 01, viernes 11 de agosto de 2023.

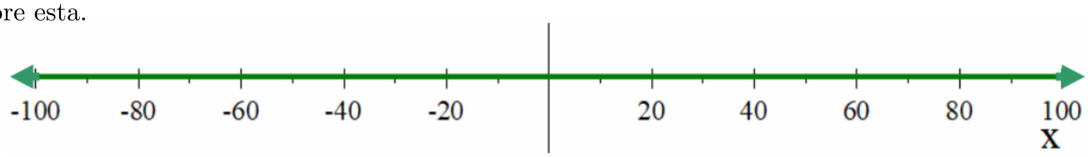
No se ha determinado fecha de entrega.

Clase de Hoy

Intervalos y desigualdades.
Introducción al concepto de función.

Intervalos y desigualdades.

La recta numerica es la representación isomórfica (que tiene la misma forma) de los números reales como puntos sobre esta.



Al conjunto de los numeros reales se le puede representar como $\mathbb{R}$ o como el intervalo de menos infinito a mas infinito: $(-\infty, \infty)$

Los intervalos básicos se definen como conjuntos dados por un conjunto universo de contexto y una proposición adecuada.

Por ejemplo: $\{x \in \mathbb{R}|\ x$ es un número par$\}$.

El universo de contexto son los números reales denotados por $\mathbb{R}$ y la proposición es x es un número par. Note que el conjunto tiene infinidad de elementos como $-10, -8, 0, 2, 6$, etc.O sea todos los números de la forma $2k$, o sea los multiplos de 2 donde k es un número entero.

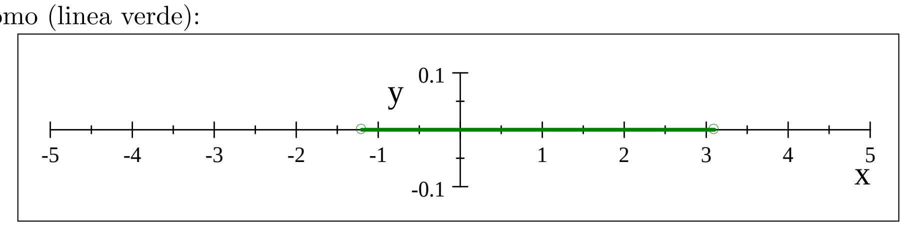
Los números enteros se denotan por $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Sean a, b numeros reales, $a < b$.

Los intervalos son:

1) Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}|a < x$ y $x < b\}$ (se lee: el conjunto de los números reales tales que a es menor que x y x es menor que b).

Por ejemplo con $a = -1.2$ y $b = 3.1$, el intervalo $(-1.2, 3.1)$ se dibuja este intervalo en la recta como númerica como (linea verde):



Note que no incluye los estremos, por lo que se indica con circulos sin relleno.

También se consideran abiertos los intervalos:

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}|\ x < b\}$ (se lee: el conjunto de los números reales tales que x es menor que b). El símbolo $|$ se lee: tal que y el símbolo $\in$ se lee y significa pertenece.

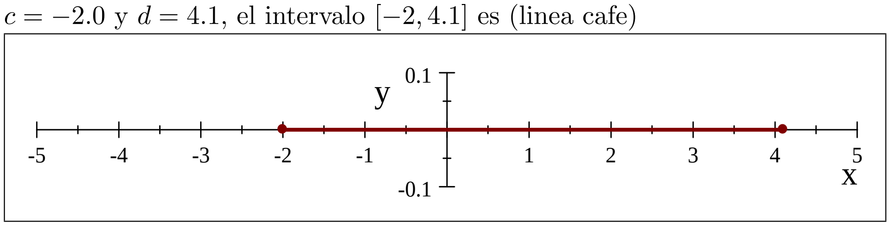
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}|a < x\}$ (se lee: el conjunto de los números reales tales que a es menor que x)

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ (se lee: el conjunto de los números reales)

Note que no se incluyen los extremos.

2) Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}|a \leq x$ y $x \leq b\}$ (Se lee: el conjunto de los números reales tales que a es menor o igual que x y x es menor o igual que b).

$c = -2.0$ y $d = 4.1$, el intervalo $[-2, 4.1]$ es (linea cafe)



Note que se incluyen los extremos y se denotan como puntos rellonos.

3) Intervalo semicerrado o semiabierto:

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \text{ y } x < b\}$ (se lee: el conjunto de los números reales tales que a es menor o igual que x y x es menor que b).

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \text{ y } x \leq b\}$ (se lee: el conjunto de los números reales tales que a es menor que x y x es menor o igual que b).

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$ (se lee: el conjunto de los números reales tales que a es menor o igual que x)

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} | \ x \leq b\}$ (se lee: el conjunto de los números reales tales x es menor o igual que b).

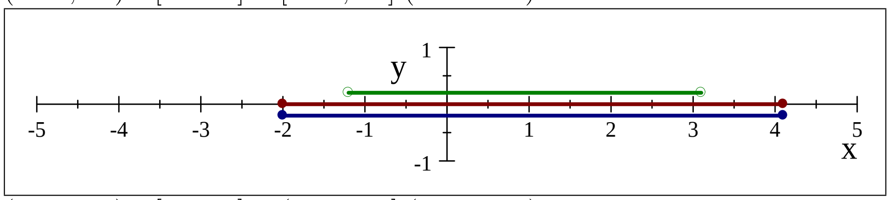
Es fundamental realizar operaciones de conjuntos con intervalos.

La unión de dos intervalos son todos los puntos que pertenecen al menos a uno de ellos.

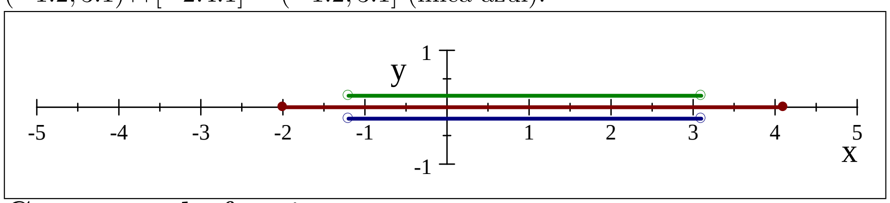
La intersección de dos intervalos son todos los puntos que pertenecen a ambos.

Por ejemplo con los intervalo $(-1.2, 3.1)$ (linea verde) y $[-2.4.1]$ (linea cafe)

$(-1.2, 3.1) \cup [-2.4.1] = [-2.4, 4.1]$ (linea azul).



$(-1.2, 3.1) \cap [-2.4.1] = (-1.2, 3.1]$ (linea azul).



Concepto de función.

Función: Definición, dominio, rango y ceros de una función, gráfica de una función.

Aplicaciones de Introducción al cálculo: Ajuste de datos (Data Fitting).

Una función de una variable real es una regla o una fórmula apropiada que relaciona dos conjuntos o dos intervalos de números reales. Se denota como sigue: $f : D \to R$ donde al conjunto de números de donde se parte se le llama dominio (D) y al conjunto de números resultantes de la evaluación de la función se le llama rango (R).

NOTAS:

1) El dominio debe ser un conjunto o un intervalo donde se pueda evaluar la fórmula de una función y puede ser dado o puede corresponder al conjunto de números reales donde se pueda evaluar la regla o fórmula de una función. El dominio natural es el intervalo donde se pueda evaluar la regla o fórmula de una función.

2) Para indicar el dominio o rango de una función se puede usar el nombre de la función como subindice. Por ejemplo: D_f denota el dominio de la función f y R_f denota al rango de la función f.

3) El rango debe ser el conjunto o el intervalo que corresponde a los valores de la función.

Por ejemplo con la fórmula $y = -4x + 2$ se construye:

Sea la función $f : D \to R$, dada por $f(x) = x + 2$.

Se tiene la regla pero falta el dominio y el rango.

Notemos las variables de la fórmula de la regla de la función se le llama variable independiente (x). Al valor de la función se le llama la variable dependiente, ya que $y = f(x) = x + 2$.

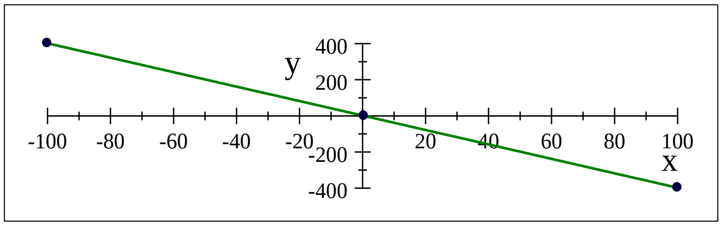
En este ejemplo particular (dominio natural) $D = \mathbb{R}$ porque la fórmula $-4x+2$ se puede calcular con cualquier número real. Por otro lado $R = \mathbb{R}$ porque los valores $f(x) = -4x + 2$ abarcan todos los números reales, como veremos en la tabla que permite ezbozar su gráfica.

O sea se tiene la función: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -4x + 2$ (nombre completo, nombre de la función, dominio, rango y regla o fórmula).

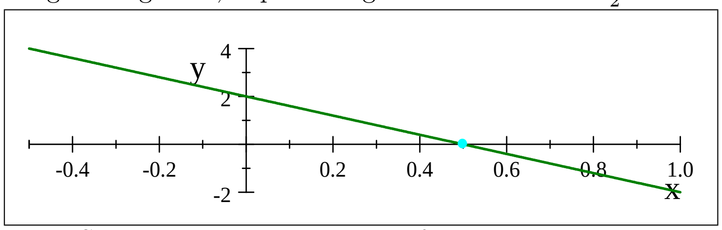
La gráfica de la función corresponde a todos los pares de valores $(x, f(x))$ o (x, y).

Por ejemplo $f(x) = -4x + 2$.

x	$y = f(x)$
-100	$f(-100) = -4(-100) + 2 = 402$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4(\frac{1}{2}) + 2 = 0$ (es un punto que se denomina cero de la función f
100	$f(100) = -4(100) + 2 = -398$

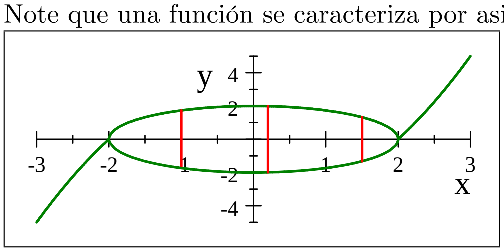


El cambio de escala permite distinguir los detalles, como por ejemplo los ceros de una función. Como se muestra en la siguiente gráfica, el punto negr marca la raiz $x = \frac{1}{2}$.



Nota: Se distinguen los ceros de las funciones como los x de su dominio tales que $f(x) = 0$ y se les llama raices.

Note que una función se caracteriza por asignar un solo valor a cada x.



Note que las rayas rojas apuntan a dos valores, por eso la linea verde no es una función.

Las graficas de las funciones ayudan a entender su comportamiento pero hay que tener cuidado con la escala,

Aplicaciones de Introducción al cálculo.

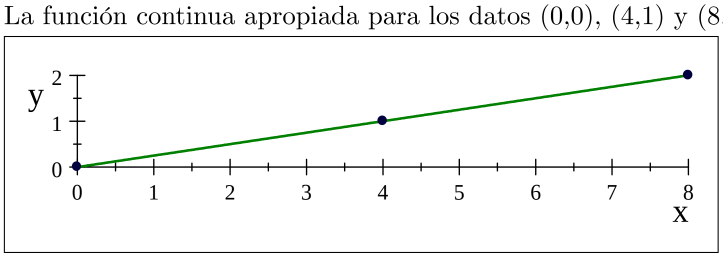
Muchos problemas reales, manejan datos discretos.

Por ejemplo la producción de sillas: pata de 0.5 metros, asiento y respaldo 2 barras de 0.5 m cada uno.

En total se requiere 4(0.5)+2(2)(0.5)= 4.0m

Se supone que se usan tiras de barras de madera de grosor y forma apropiadas.

La función continua apropiada para los datos (0,0), (4,1) y (8,2) es la recta: $s(x) = \frac{x}{4}$



Tal formulación permite entender el crecimiento de la producción de sillas en función de los metros de madera.

El ajuste de datos o Data Fitting consiste en determinar la función apropiada a los datos. Es un tema avanzado que no es de este curso, pero es importante porque los datos se transforman en funciones reales que permiten análisis y soluciones con base en las herramientas del Cálculo Diferencial e Integral y de matemáticas avanzadas como Cálculo Variacional, Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Control, etc..

Note que la recta es la función apropiada, porque una constante o una cuadratica no corresponderian con lo que indican los datos: (0,0), (4,1) y (8,2).