1112042 Introducción al Cálculo GRUPO CAT83 TRIMESTRE 23P
Martes 15 de agosto de 2023. Sesión 7

Clase de anterior

Intervalos y desigualdades.
Introducción al concepto de función.

Clase de Hoy

Aplicaciones de Introducción al cálculo.
Desigualdad: a) $ax + b \leq cx + d$.

En esta clase se estudia la determinación del intervalo donde se cumple la desigualdad anterior y por medio de dos métodos (más las herramientas como PhotoMath) el alumno aprenderá a comprobar su respuesta.

Nota: El programa de la UEA indica que se deben resolver los casos de desigualdades: a) $ax + b \leq cx + d$, b) $ax^2 + bx + c \leq 0$, c) $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$, d) $|ax + b| \leq k$, e) $|ax + b| \geq k$. Estos se ven en las siguientes clases.

Aplicaciones de Introducción al cálculo.

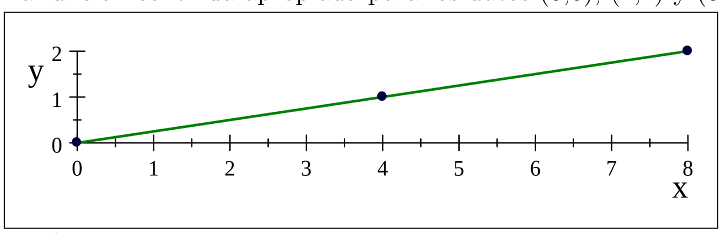
Muchos problemas reales, manejan datos discretos que dan origen a funciones que usan todos los números reales.

Por ejemplo la producción de sillas: pata de 0.5 metros, asiento y respaldo 2 barras de 0.5 m cada uno.

En total se requiere 4(0.5)+2(2)(0.5)= 4.0m

Se supone que se usan tiras de barras de madera de grosor y forma apropiadas.

La función continua apropiada para los datos (0,0), (4,1) y (8,2) es la recta: $s(x) = \frac{x}{4}$



Tal formulación permite entender el crecimiento de la producción de sillas en función de los metros de madera.

El ajuste de datos o Data Fitting consiste en determinar la función apropiada a los datos. Es un tema avanzado que no es de este curso, pero es importante porque los datos se transforman en funciones reales que permiten análisis y soluciones con base en las herramientas del Cálculo Diferencial e Integral y de matemáticas avanzadas como Cálculo Variacional, Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Control, etc..

Note que la recta es la función apropiada, porque una constante o una cuadrática no corresponderían con lo que indican los datos: (0,0), (4,1) y (8,2).

En esta clase se estudia la desigualdad: a) $ax + b \leq cx + d$.

Para las desigualdades, el problema consiste en determinar un intervalo donde se cumple una desigualdad. En este caso a) $ax + b \leq cx + d$.

Observación: Una interpretación geométrica del problema es que se trata de determinar el intervalo en el eje X donde los valores y_d de la recta de la derecha ($y_d = cx + d$) que son mayores o iguales que los valores y_i de la recta de la izquierda ($y_i = ax + b$).

Método de resolución.

Método lógico-algebraico: Usando la regla de la balanza, "pasar" del lado izquierdo los valores independientes y simplificar, y pasar del lado derecho las expresiones que tienen a la variable x y simplificar.

Ejercicios de ejemplo.

Ejemplo 1) $\frac{2}{3} - 4x \leq 4 + 2x$.

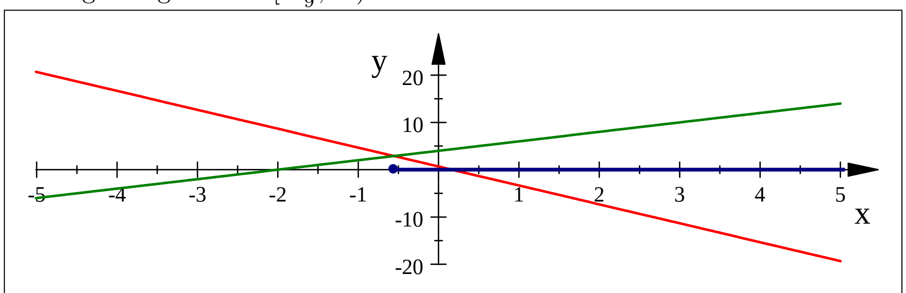
Respuesta:
Partiendo de
$\frac{2}{3} - 4x \leq 4 + 2x$, se tiene
$-4 + \frac{2}{3} - 4x + 4x \leq -4 + 4 + 2x + 4x$ (por la regla de la balanza).
Se tiene:

$-4+\frac{2}{3} \leq 2x+4x$. Se simplifican ambos lados de la desigualdad
Del lado izquierdo se tiene $-4+\frac{2}{3}=\frac{(-4)3+2}{3}=\frac{-12+2}{3}=-\frac{10}{3}$.
Del lado derecho se tiene $2x+4x=6x$.
Sustituyendo los lados anteriores en su respectivo lugar, se tiene
$-\frac{10}{3} \leq 6x$, "se despeja x" (por la regla de la balanza)
$-\frac{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right) \leq \left(\frac{1}{6}\right)6x$.
De aqui se tiene: $-\frac{10}{18} \leq x$.
Simplificando factores comunes en la fracción, la desigualdad resultante es
$-\frac{5}{9} \leq x$.
Resultado. El intervalo donde se cumple $\frac{2}{3}-4x \leq 4+2x$ es $[-\frac{5}{9},\infty)$.

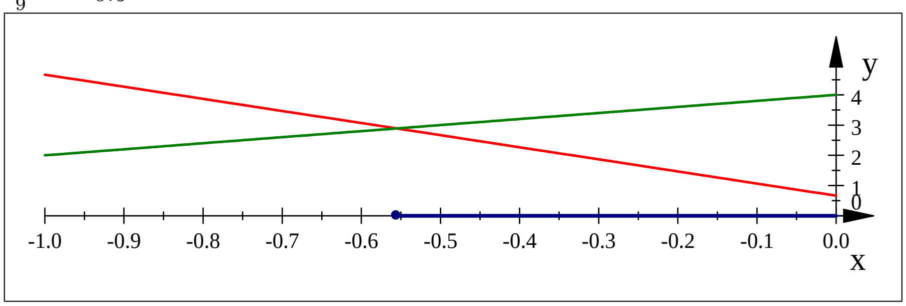
Verificación por medio de la interpretación geométrica.

Ahora por medio de la interpretación geométrica es posible la verificación (opcional):
$y_i=\frac{2}{3}-4x$ recta roja, $y_d=4+2x$ recta verde.

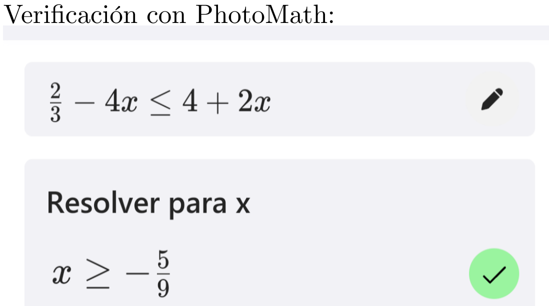
Note que a partir de $x=-\frac{5}{9}$ todos los puntos de la recta roja están debajo de la recta verde, por eso la solución es el intervalo resultante (línea azul), que es el que corresponde con el intervalo determinado anteriormente por el Método lógico-algebraico: $[-\frac{5}{9},\infty)$.



$\frac{-5}{9}=-0.\overline{5}$



.
Verificación con PhotoMath:



Notas sobre la ecuación de la recta.

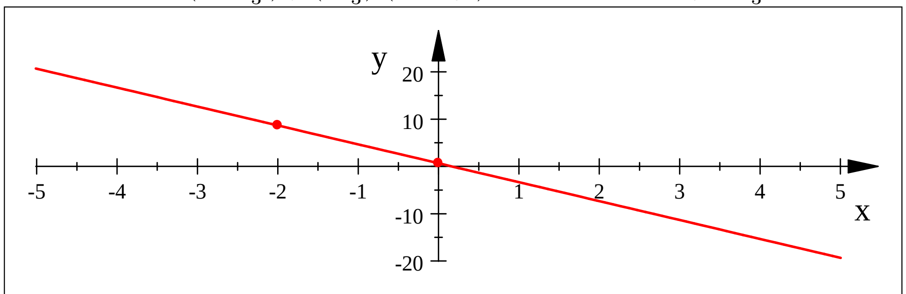
La ecuación de la recta es de la forma $y=mx+b$ donde m es el valor de la pendiente y b la ordenada al origen. O sea la función $f(x)=mx+b$. Para graficar y derminar la ecuación de una recta solo se necesitan dos puntos. Sean (x_0,y_0) y (x_1,y_1) entonces:

a) La pendiente es $m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$.
b) La ordenada al origen, una vez determinada la pendiente se obtiene de $y_1=mx_1+b$, o sea $b=y_1-mx_1$.
c) Los dos puntos con una buena separación sirven para realizar la gráfica.

Por ejemplo. Para $y_i = \frac{2}{3} - 4x$ un punto es $(0, b) = (0, \frac{2}{3})$ ya que la ordenada al origen es $\frac{2}{3}$.

Con $x = -2$, otro punto de $y_i = f(x) = \frac{2}{3} - 4x$ es $f(-2) = \frac{2}{3} - 4\,(-2) = \frac{26}{3}$. El punto es $(-2, \frac{26}{3})$.

Con los puntos $(-2, \frac{26}{3})$ y $(0, \frac{2}{3})$ (en rojo) se traza la recta $y_i = \frac{2}{3} - 4x$ en la siguiente gráfica:



Ahora si se tuvieran los puntos $(-2, \frac{26}{3}) = (x_0, y_0)$ y $(0, \frac{2}{3}) = (x_1, y_1)$ para determinar la ecuación de la recta.

La pendiente se obtiene de $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ sustituyendoles, o sea $m = \frac{\frac{2}{3} - \frac{26}{3}}{0 - (-2)} = \frac{-\frac{24}{3}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$.

La pendiente es $m = -4$.

La ordenada al origen se obtiene de $b = y_1 - m x_1$. O sea $b = \frac{2}{3} - (-4)\,(0) = \frac{2}{3}$. Note que se puede decir $b = \frac{2}{3}$ ya que corresponde al punto $(0, \frac{2}{3})$ con $x = 0$.

Ejemplo 2) Determinar el intervalo donde se cumple la desigualdad: $-x \geq -x + 5$.

RESPUESTA.

Note que son equivalentes la expresiones $-x \geq -x + 5$ y $-x + 5 \leq -x$.

O sea se trata de la desigualdad de la forma a) $ax + b \leq cx + d$.

Se toma: $-x \geq -x + 5$. Es equivalente a $-x + 5 \leq -x$. Despejando x :

$5 \leq x - x = 0$. De aqui se tiene $5 \leq 0$, que es una contradicción.

Como no es posible que 5 sea menor o igual a 0, el resultado es el conjunto vacío ϕ.

O sea no hay valores reales que cumplan la desigualdad $-x + 5 \leq -x$.

Respuesta. El intervalo resultante es el conjunto vacío ϕ.

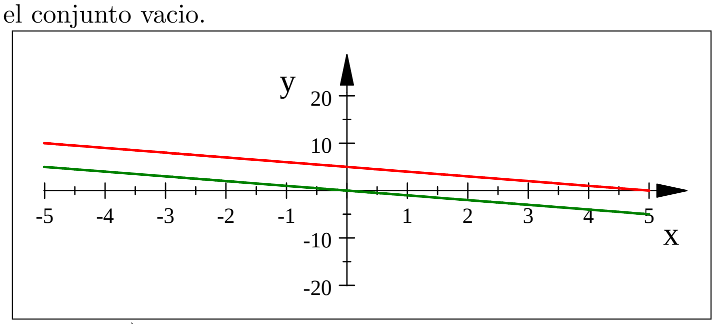
Verificación por medio de la interpretación gráfica:

Dada $-x + 5 \leq -x$.

$y_i = -x + 5$ recta roja, $y_d = -x$ recta verde.

Las rectas anteriores son paralelas, tienen la misma pendiente $m = -1$.

No hay intervalo resultante, ya que no hay puntos de la recta roja debajo de la recta verde, por eso la solucion es el conjunto vacio.



Ejemplo 3) Determinar el intervalo donde se cumple la desigualdad: $\pi + \frac{\pi}{2}x \leq \frac{3}{4} - 2\pi x$.

RESPUESTA.

Se toma:

$\pi + \frac{\pi}{2}x \leq \frac{3}{4} - 2\pi x$, por la regla de la balanza se pasan los valores independientes del lado izquierdo y los terminos con la variable x del lado derecho de la desigualdad.

$\left(-\frac{\pi}{2}x - \frac{3}{4}\right) + \pi + \frac{\pi}{2}x \leq \frac{3}{4} - 2\pi x + \left(-\frac{\pi}{2}x - \frac{3}{4}\right)$

Por lo que es equivalente a: $\pi - \frac{3}{4} \leq -2\pi x - \frac{\pi}{2}x$.

Del lado izquierdo: $\pi - \frac{3}{4} = \frac{\pi(4) - 3}{4} = \frac{4\pi - 3}{4}$

Del lado derecho: $-2\pi x - \frac{\pi}{2}x = x\left(-2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = x\left(\frac{-2\pi(2) - \pi}{2}\right) = x\left(\frac{-4\pi - \pi}{2}\right) =$
$-\frac{5\pi}{2}x$.

Se tiene: $\frac{4\pi - 3}{4} \leq -\frac{5\pi}{2}x$. Se despeja x (note que la desigualdad cambia porque el factor $-\frac{5\pi}{2}$ es negativo):

$\frac{\frac{4\pi-3}{4}}{-\frac{5\pi}{2}} \geq x$.

Se simplifica $\frac{\frac{4\pi-3}{4}}{\frac{-5\pi}{2}} = \frac{(4\pi-3)(2)}{4(-5\pi)} = \frac{8\pi-6}{-20\pi} = \frac{4\pi-3}{-10\pi}$.

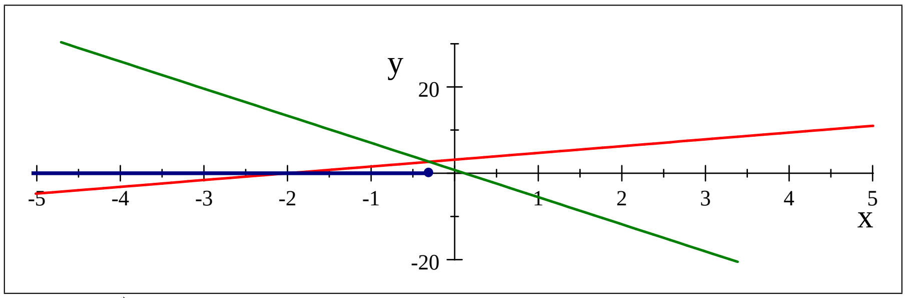
La desigualdad es $x \leq -\frac{4\pi-3}{10\pi}$.

Resultado: El intervalo donde se cumple $\pi + \frac{\pi}{2}x \leq \frac{3}{4} - 2\pi x$ es $(-\infty, -\frac{4\pi-3}{10\pi}]$.

Verificación opcional.

$y_i = \pi + \frac{\pi}{2}x$ recta roja, $y_d = \frac{3}{4} - 2\pi x$ recta verde.

Note que en $x = -\frac{4\pi-3}{10\pi} \approx -0.304\,51$ todos los puntos anteriores de la recta roja están debajo de la recta verde, por eso la solucion es en intervalo resultante (línea azul) es el corresponde con $(-\infty, -\frac{4\pi-3}{10\pi}]$.



Ejemplo 4) Determinar el intervalo donde se cumple la desigualdad: $4 - 2x \geq \frac{3}{2} - 2x$.

Respuesta.

Note que $4 - 2x \geq \frac{3}{2} - 2x$, es equivalente a $\frac{3}{2} - 2x \leq 4 - 2x$.

$\frac{3}{2} - 2x \leq 4 - 2x$. La solución es $\mathbb{R}$, ya que despejando x se tiene

$0 \leq 4 - \frac{3}{2} = \frac{4(2)-3}{2} = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$, esto es $0 \leq \frac{5}{2}$, que siempre es cierto.

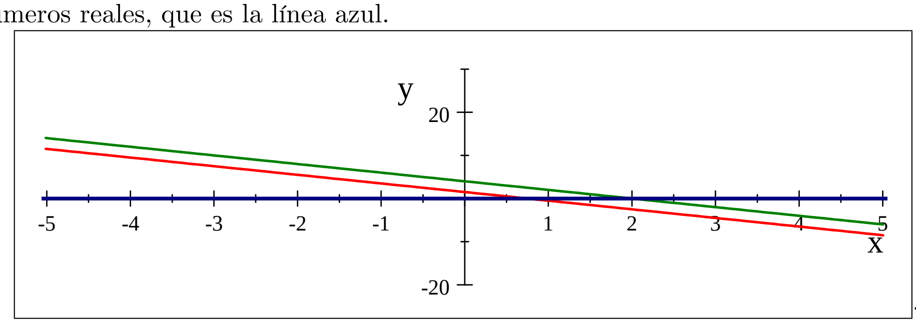
El intervalo resultante donde se cumple $4 - 2x \geq \frac{3}{2} - 2x$ es $\mathbb{R}$, o sea, son todos los números reales.

Verificación opcional.

$y_i = \frac{3}{2} - 2x$ recta roja, $y_d = 4 - 2x$ recta verde.

Las dos rectas son paralelas.

Como todos los puntos de la recta roja están por debajo de la recta verde, la solución es el conjunto de los números reales, que es la línea azul.



.

Adicionalmente pueden usar programas de mátematicas como PhotoMath para verificar sus resultados.

Note que lo importante no es el resultado, sino el desarrollo y que el alumno adquiera las habilidades para resolver, justificar y validar (demostrar) sus resultados.

El método lógico-algebraico y la interpretación geométrica se usan en muchos casos a lo largo de este curso. Las siguientes clases son para los casos: b) $ax^2 + bx + c \leq 0$, c) $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$, d) $|ax + b| \leq k$, e) $|ax + b| \geq k$.