1112042 Introducción al Cálculo GRUPO CAT83 TRIMESTRE 23P

Lunes 21 y martes 22 de agosto de 2023. Sesiones 11 y 12.

Clase de anterior

Tarea obligatoria 01 acerca de los ejercicios de las desigualdades: a) $ax+b \leq cx+d$, d) $|ax+b| \leq k$, e) $|ax+b| \geq k$.

Ejemplos.

Clase de Hoy

Desigualdades b) $ax^2+bx+c \leq 0$ y c) $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$ del programa analítico.

En esta clase se trata de determinar un intervalo donde se cumple una desigualdad del tipo: $ax^2+bx+c \leq 0$ o bien una desigualdad de tipo $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$.

b) $ax^2+bx+c \leq 0$

Una interpretación geométrica del problema ($ax^2+bx+c \leq 0$): se trata de determinar el intervalo en el eje X donde los valores $y_c = f(x) = ax^2+bx+c$ (de un polinomio cuadrático o de una fórmula cuadrática o de una parábola) están por debajo de la recta ($y=0$), o sea por debajo del eje X (que se indicara con una linea roja).

La fórmula $ax^2+bx+c=0$ significa resolver el problema de determinar las raices, o sea los dos valores r_1 y r_2 tales que $a(r_1)^2+br_1+c=0$ y $a(r_2)^2+br_2+c=0$.

Las raices r_1 y r_2 no siempre existen en los números reales. Sin embargo hay un procedimiento que permite determinar a las raices reales.

Procedimiento para la determinación de las raices de $ax^2+bx+c=0$.

El coeficiente a debe ser distinto de cero.

1) Calcular el discriminante $d=b^2-4ac$

Si $d \geq 0$ tiene raices reales y se continua en el paso 2).

En otro caso, las raices son números complejos y no hay raices en los números reales para la fórmula dada.

2) Las dos posibles raices en los números reales se obtienen de las fórmulas:

$r_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$ y $r_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$.

Nota: esto significa que $0 = ax^2+bx+c = (x-r_1)(x-r_2)$, o sea se factoriza mediante las raices.

Comprobación: $(x-r_1)(x-r_2)$, sustituyendo r_1 y r_2 se obtiene $\left(x-\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\right) = \frac{1}{4a^2}b^2 - \frac{1}{4a^2}d + x^2 + \frac{1}{a}bx$, sustituyendo d se obtiene

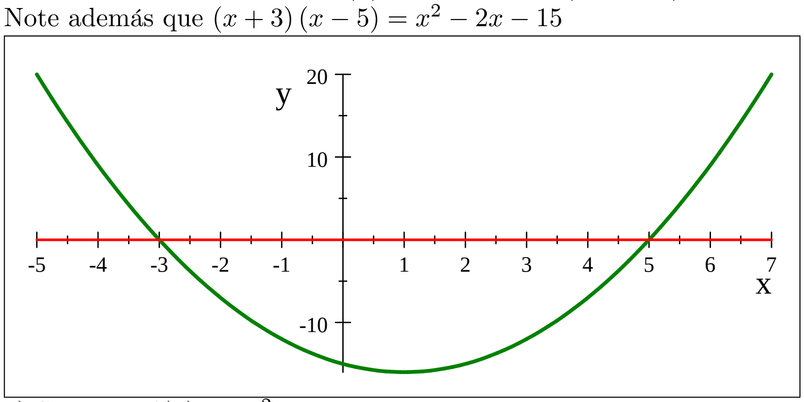
$\frac{1}{4a^2}b^2 - \frac{1}{4a^2}\left(b^2-4ac\right) + x^2 + \frac{1}{a}bx = \frac{1}{a}\left(ax^2+bx+c\right)$. Note que $\frac{1}{a}\left(ax^2+bx+c\right)=0$, o sea $ax^2+bx+c = 0\,(a)=0$.

O sea se tiene la factorización $(x-r_1)(x-r_2)=0$ de la fórmula $ax^2+bx+c=0$.

Por otro lado la fórmula cuadrática se conoce como la forma geometrica parábola que cumple con la propiedades:

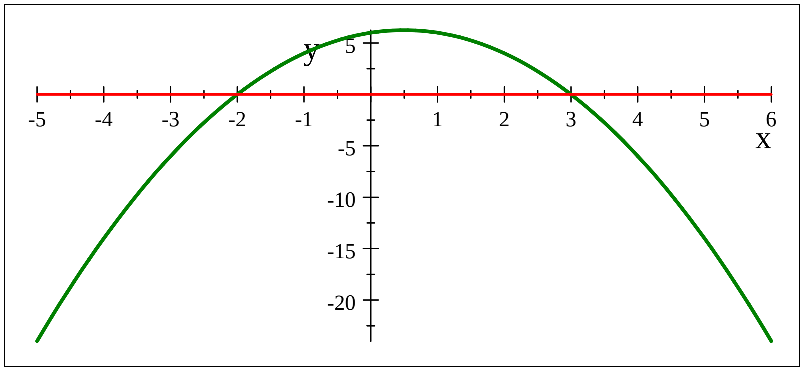
1) Si $a>0$, $f(x)=ax^2+bx+c$ crece (hacia $+Y$) cuando x toma valores positivos o negativos grandes. O sea abre hacia arriba. Por ejemplo $f(x)=x^2-2x-15$(en verde)

Note además que $(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$



1) Si $a<0$, $f(x)=ax^2+bx+c$ decrece hacia $-Y$ cuando x toma valores positivos o negativos grandes. O sea abre hacia abajo. Por ejemplo $f(x)=-x^2+x+6$ (en verde)

Note además que $-(x+2)(x-3)=-x^2+x+6$



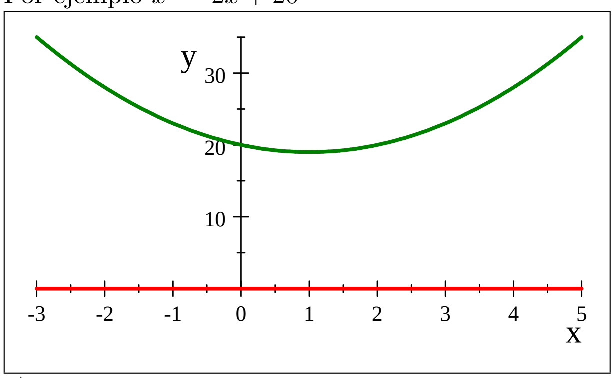
Con base en lo anterior, un método para determinar el intervalo es:

1) Determinar las raices reales.

Si no tiene raices reales considere los dos casos del coeficiente a de la cuadrática.

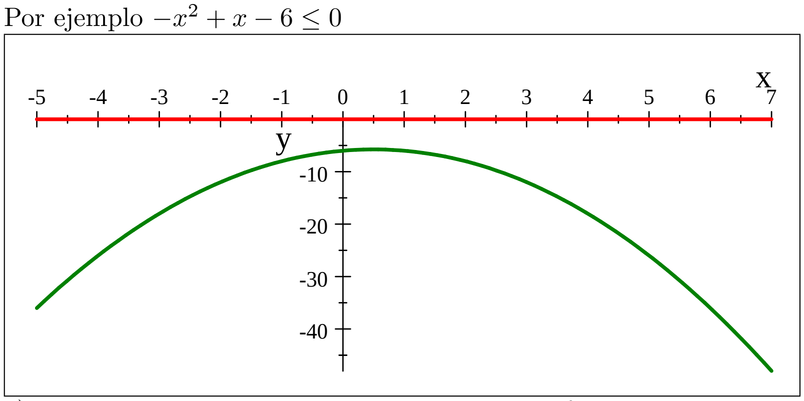
a) Con $a > 0$ la parabola abre hacia arriba, por arriba siempre del eje X no lo cruza. Por tanto el intervalo es vacio.

Por ejemplo $x^2 - 2x + 20$



b) Con $a < 0$ la parabola abre hacia abajo, siempre está abajo del eje X y no lo cruza. Por tanto el intervalo es $\mathbb{R}$, o sea la desigualdad se cumple para todos los números reales.

Por ejemplo $-x^2 + x - 6 \leq 0$



2) En caso de existan las raices reales, se puede factorizar la cuadrática. $0 = ax^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)$. Analizar los casos cuando $(x - r_1)(x - r_2) \leq 0$.

O sea los casos a) $(x - r_1) \geq 0, (x - r_2) \leq 0$ y b) $(x - r_1) \leq 0, (x - r_2) \geq 0$.

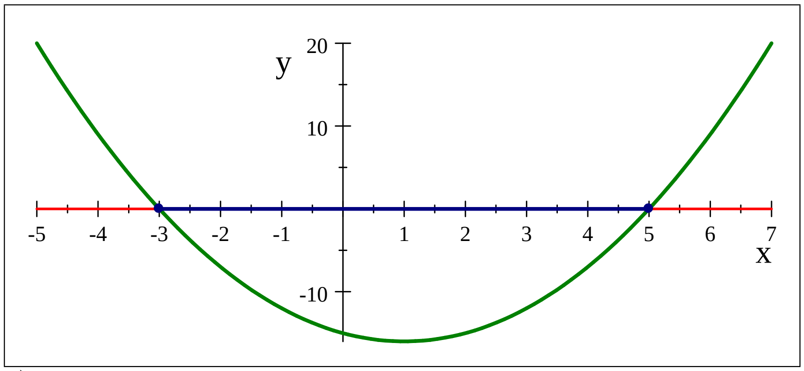
Note que los casos corresponde con a) > 0 $(+)$ por factor < 0 $(-)$ es $(-)$ y b) < 0 $(-)$ por factor > 0 $(+)$ es $(-)$.

Por la interpretación geometrica se tiene:

a) Con $a > 0$ la parabola abre hacia arriba, cruza al eje X en las raices. Por tanto el intervalo es entre las raices.Por ejemplo $f(x) = x^2 - 2x - 15$(en verde)

Como $x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$.

El intervalo solución es $[-3, 5]$ (linea azul).

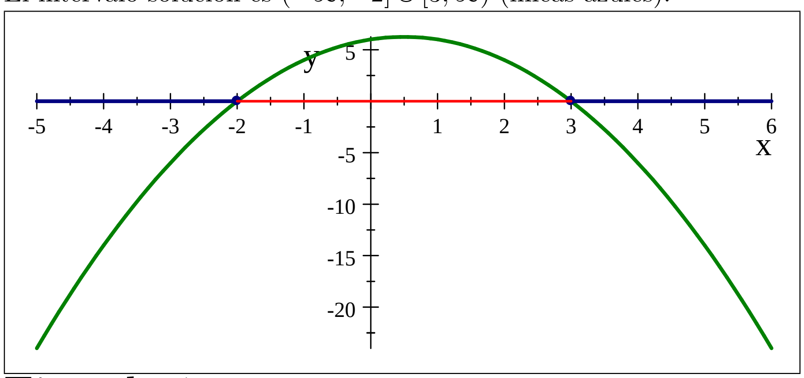


b) Con $a < 0$ la parabola abre hacia abajo, cruza al eje X en las raices. Por tanto el intervalo son los extremos con base en las raices.

Por ejemplo $f(x) = -x^2 + x + 6$ (en verde)

Como $-x^2 + x + 6 = -(x+2)(x-3)$.

El intervalo solución es $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$ (lineas azules).

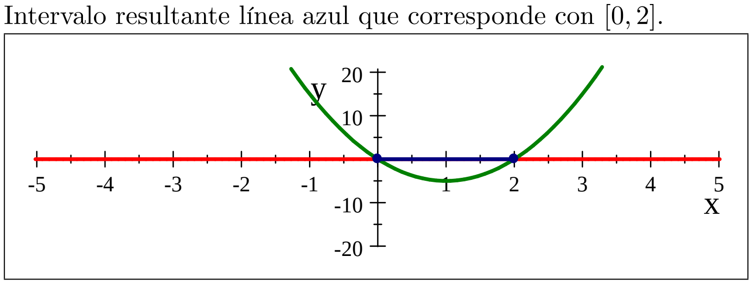


Ejemplo 1. Determinar el intervalo donde $5x^2 - 10x \leq 0$.

La siguiente gráfica ayuda comprender el problema:

$y = 0$ recta roja, $y_c = 5x^2 - 10x$ recta verde.

Intervalo resultante línea azul que corresponde con $[0, 2]$.



Respuesta ejemplo 1.

1) Metodo lógico algebraico de la factorización.

$0 = 5x^2 - 10x = 5x(x-2)$ O sea, $x(x-2) = 0$.

Esto significa que las raices son $r_0 = 0$ y $r_1 = 2$.

Se tiene $(x-0)$ y $(x-2)$.

Caso a) $(x-0) \geq 0$ y $(x-2) \leq 0$.

Se tiene $x \geq 0$ y por regla de la balanza sumando 2, $(x-2) + 2 \leq 0 + 2$, se tiene

Se tiene $x \geq 0$ y $x \leq 2$, se tiene los intervalos

$[0, \infty) \cap (-\infty, 2]$ por tanto el intervalo es $[0, 2]$.

Del caso b) $x \leq 0$ y $(x-2) \geq 0$. Con la regla de la balanza se suma 2 al segundo termino.

Se tiene $x \leq 0$ y $x - 2 + 2 \geq 0 + 2$.

Se tiene $x \leq 0$ y $x \geq 2$. Se tiene los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[2, \infty)$. Note que x no hay intersección y por tanto es ϕ.

Uniendo los intervalos del inciso a) y b) se tiene $[0, 2] \cup \phi = [0, 2]$.

Es decir el intervalo resultante es $[0,2]$. Note que coincide con la gráfica anterior.

Respuesta ejemplo 1.

2) Método por la fórmula de determinación de raices de la cuadratica. $5x^2 - 10x = ax^2 + bx + c$, de aqui se obtiene $a = 5, b = -10, c = 0$.

El discriminante es $d = b^2 - 4ac$

En este caso se tiene $d = (-10)^2 - 4\,(5)\,(0) = 100 > 0$.

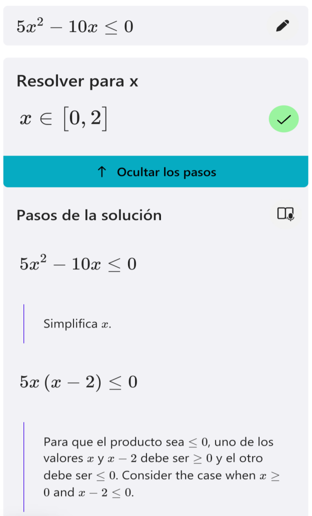
Se tienen raices reales:

$r_2 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$(sustituyendo)$= \frac{-(-10)+\sqrt{100}}{2(5)} = \frac{10+10}{10} = \frac{20}{10} = 2$.

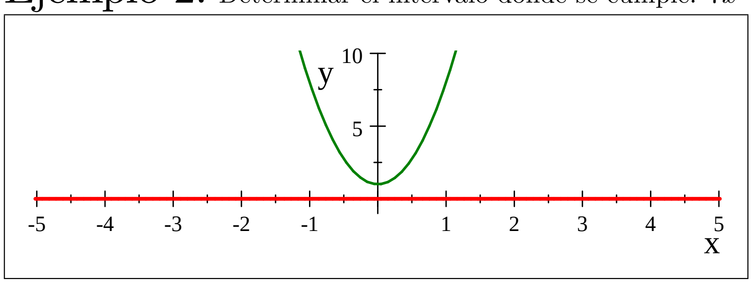
$r_1 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$(sustituyendo)$= \frac{-(-10)-\sqrt{100}}{2(5)} = \frac{10-10}{10} = 0$.

Se tiene los mismos datos del procedimiento anterior y por tanto el intervalo resultante es $[0,2]$.

PhotoMath obtiene la misma solución y los pasos de la solución son parecidos a los vistos en clase.



Ejemplo 2. Determinar el intervalo donde se cumple: $7x^2 + 1 \leq 0$.



Por el dibujo el intervalo es ϕ. Ya que no hay puntos verdes de la cuadrática por debajo de la linea roja $(y = 0)$.

2) Método por la fórmula de deteminación de raices de la cuadrática. $7x^2 + 1 = ax^2 + bx + c$, de aqui se obtiene $a = 7, b = 0, c = 1$.

El discriminante es $d = b^2 - 4ac$

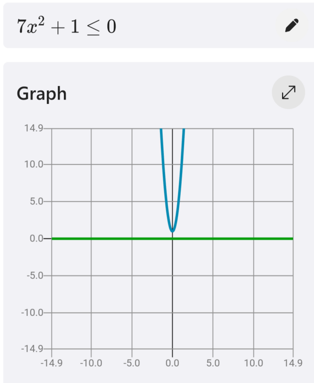
En este caso se tiene $d = (0)^2 - 4\,(7)\,(1) = -28 < 0$.

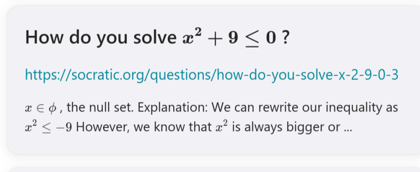
No tiene raices reales.

Como el factor a de la cuadrática es $a = 7 > 0$, significa que la cuadrática toma todos sus valores positivos, abre hacia arriba. Es decir, no hay valores por debajo del eje X.

El intervalo solución es ϕ (el conjunto vacio).

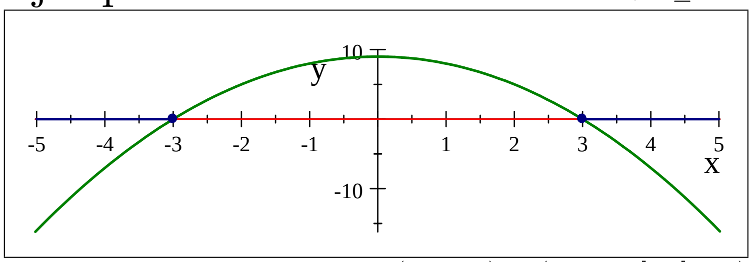
PhotoMath indica que problemas de este tipo tienen como solución ϕ, el conjunto nulo.





Continuamos hoy.

Ejemplo 3. Determinar el intervalo donde $-x^2 + 9 \leq 0$.



Del dibujo el intervalo resultante (en azul) es $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

Respuesta.

1) Metodo de factorización directa: $-x^2 + 9 = -(x-3)(x+3)$.

Esto significa que las raices son $x_0 = -3$ y $x_1 = 3$.

Las raices son $x_0 = -3$ y $x_1 = 3$.

Se tienen los casos a) $-(x-3) \geq 0$ y $(x+3) \leq 0$ y b) $-(x-3) \leq 0$ y $(x+3) \geq 0$.

Del caso a) $-(x-3) \geq 0$ y $(x+3) \leq 0$.

$-x + 3 \geq 0$ y $x + 3 \leq 0$. La regla de la balanza es sumar -3.

$-x + 3 - 3 \geq 0 - 3$ y $x + 3 - 3 \leq 0 - 3$. Se obtiene

$-x \geq -3$ y $x \leq -3$. Regla para el primero por (-1), cambia la desigualdad.

$x \leq 3$ y $x \leq -3$. O sea se tiene los intervalos $(-\infty, 3]$ y $(-\infty, -3]$.

Significa una intersección: $(-\infty, 3] \cap (-\infty, -3] = (-\infty, -3]$

El intervalo del caso a) es $(-\infty, -3]$.

Del caso b) $-(x-3) \leq 0$ y $(x+3) \geq 0$. Realizando la multiplicación del lado izquierdo:

$-x + 3 \leq 0$ y $(x+3) \geq 0$.

Por regla de la balanza, sumando -3 en ambos lados y en las dos desigualdades:

$-x + 3 + (-3) \leq 0 + (-3)$ y $x + 3 + (-3) \geq 0 + (-3)$

Se tiene $-x \leq -3$ y $x \geq -3$. Se multiplica por (-1) la desigualdad de la izquierda y se inveierte la desigualdad: $x \geq 3$ y $x \geq -3$.

Se tienen dos intervalos $[3, \infty)$ y $[-3, \infty)$.

Significa una intersección: $[3, \infty) \cap [-3, \infty) = [3, \infty)$.

El intervalo del caso b) es $[3, \infty)$.

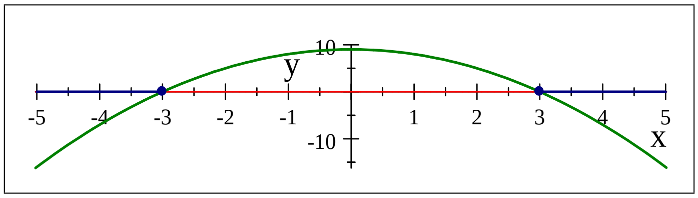
Uniendo los intervalos de los incisos a) y b) se tiene $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

Es decir el intervalo resultante es $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

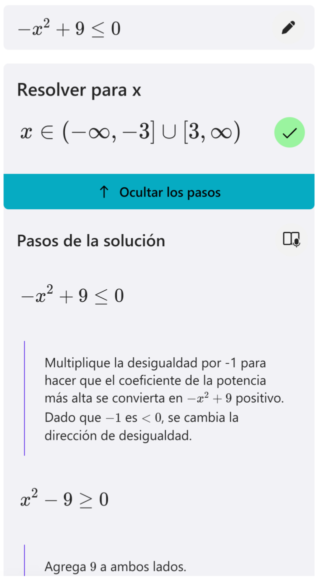
Por la interpretación grafica se obtiene el mismo resultado.

$y = 0$ recta roja, $y_c = f_c(x) = -x^2 + 9$ recta verde.

El intervalo resultante es la línea azul que corresponde con los valores de x para los cuales $f_c(x) \leq 0$, o sea $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.



PhotoMath obtiene la misma solución y los pasos de la solución son parecidos a los vistos en clase, pero en este caso son de despejar las variables por las propiedades de la aritmética, que es un una forma equivalente resolver por la regla de la balanza.



¿Como resolver el problema $4x^2-8x+1\geq 0$ con lo visto en esta clase?

Note que en esta clase se estudio: b) $ax^2+bx+c\leq 0$.

Se debe multiplicar por (-1) para tener el modelo de la clase: $-4x^2+8x-1\leq 0$.

¿Como resolver el problema $4x^2-8x+1\leq ax+b$ con lo visto en esta clase?

En este caso se lleva al modelo b) mediante un desarrollo algebraico apropiado, o sea sumando de ambos lados $-(ax+b)$ de donde resulta $4x^2+(-8-a)x+1-b\leq 0$.

Problema: determinar un intervalo donde se cumple una desigualdad de caso c) $\frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$.

Interpretación geométrica del problema($\frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$): se trata de determinar el intervalo en el eje X donde los valores de la recta del numerador $y_n=ax+b$ y los valores de la recta del denominador $y_d=cx+d$ cumplen dos casos para que el coeciente sea negativo o cero:

a) $y_n=ax+b\leq 0$ y $y_d=cx+d>0$.

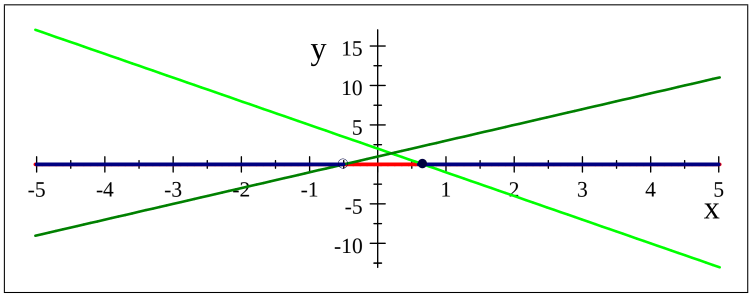
b) $y_n=ax+b\geq 0$ y $y_d=cx+d<0$.

NOTE que la recta del divisor no puede ser cero por eso se pide $>$ o $<$, para no incluir al cero como del divisor o denominador.

Ejemplo: Determinar el intervalo donde $\frac{-3x+2}{2x+1}\leq 0$.

Resolución gráfica.

Sea $\frac{-3x+2}{2x+1}$,se tiene $y_n=-3x+2$ (verde claro) y la recta $y_d=2x+1\neq 0$ (verde oscuro), y la recta $y=0$ (aparece en rojo)



Note que se eligen dos intervalos:

a) donde la linea en verde claro es ≥ 0 y la linea en verde oscuro es < 0, o sea el intervalo $(-\infty, \frac{1}{2})$.

b) donde la linea en verde claro es ≤ 0 y la linea en verde oscuro es > 0, o sea el intervalo $[\frac{2}{3}, \infty)$.

Por tanto, el intervalo solución es $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup [\frac{2}{3}, \infty)$.

Método de solución lógico-algebraico:

1) Se deben evaluar los casos

a) $y_n = ax + b \leq 0$ y $y_d = cx + d > 0$; y

b) $y_n = ax + b \geq 0$ y $y_d = cx + d < 0$.

2) Resolver a), es decir despejar x.

3) Resolver b), es decir despejar x.

4) El intervalo solución es la unión de los intervalos de los casos 2) y 3).

Ejemplo. Determinar el intervalo donde se cumple que $\frac{-3x+2}{2x+1} \leq 0$.

Respuesta.

1) Se deben resolver los casos

A) $y_n = -3x + 2 \leq 0$ y $y_d = 2x + 1 > 0$;

B) $y_n = -3x + 2 \geq 0$ y $y_d = 2x + 1 < 0$.

2) Resolver A), es decir despejar x.

Para en numerador

$-3x + 2 \leq 0$. Por regla de la balanza se suma -2 en ambos lados: $-3x + 2 \leq 0$,

se tiene $-3x + 2 + (-2) \leq 0 + (-2)$. O sea $-3x \leq -2$.

Por regla de la balanza se multiplica por $-\frac{1}{3}$ en ambos lados y por ser negativo se invierte la desigualdad: $-3x\left(-\frac{1}{3}\right) \geq -2\left(-\frac{1}{3}\right)$. Se obtiene

$x \geq \frac{2}{3}$ que le corresponde el intervalo $[\frac{2}{3}, \infty)$.

Para el denominador

$2x+1 > 0$. Por regla de la balanza se suma -1 en ambos lados: $2x+1+(-1) > 0+(-1)$. Se obtiene $2x > -1$.

Por regla de la balanza se multiplica por $\frac{1}{2}$ en ambos lados: $2x\left(\frac{1}{2}\right) > -1\left(\frac{1}{2}\right)$.

Resulta $x > -\frac{1}{2}$ o sea el intervalo es $(-\frac{1}{2}, \infty)$.

Los intervalos del numerador y denominador se deben cumplir al mismo tiempo: $[\frac{2}{3}, \infty) \cap (-\frac{1}{2}, \infty) = [2/3, \infty)$.

3) Resolver B).

Para el numerador:

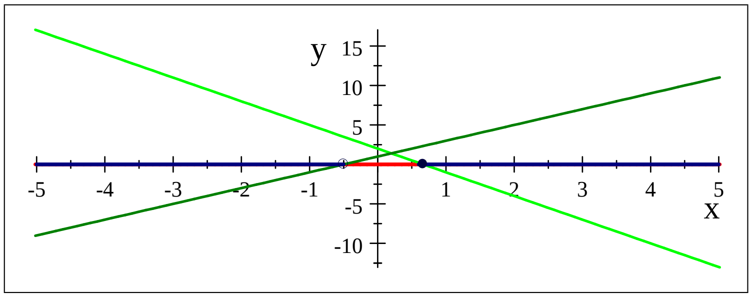
$-3x + 2 \geq 0$; se tiene despejando x o sea aplicando la regla de la balanza adecuadamente: $-3x \geq -2$ y luego $x \leq \frac{2}{3}$. El intervalo es $(-\infty, \frac{2}{3}]$.

Para el divisor:

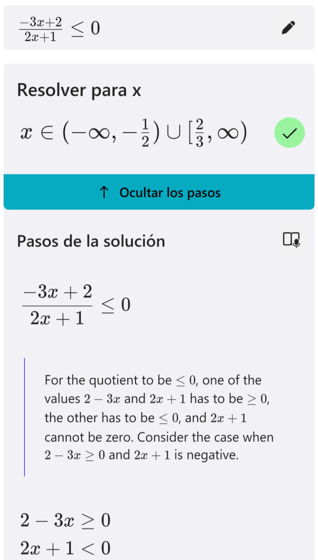
$y_d = 2x + 1 < 0$; se tiene despejando x o sea aplicando la regla de la balanza adecuadamente: $2x < -1$ y luego $x < -\frac{1}{2}$.El intervalo es $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

El intervalo es $(-\infty, \frac{2}{3}] \cap (-\infty, -\frac{1}{2}) = (-\infty, -1/2)$.

4) El intervalo solución es la unión de los intervalos de los casos 2) y 3): $(-\infty, -1/2) \cup [2/3, \infty)$. Tal como se muestra en la figura siguiente con $y_n = -3x + 2$ (verde claro) y la recta $y_d = 2x + 1 \neq 0$ (verde oscuro), y la recta $k = 0$ (aparece en rojo).



PhotoMath obtiene la misma solución y los pasos de la solución son parecidos a los vistos en clase, en este caso están en inglés.



Otro ejemplo. Determinar el intervalo donde se cumple $\frac{-5x+\frac{2}{7}}{-5x+10} \leq 0$.

1) Se deben evaluar los casos:

a) $y_n = -5x + \frac{2}{7} \leq 0$ y $y_d = -5x + 10 > 0$;

b) $y_n = -5x + \frac{2}{7} \geq 0$ y $y_d = -5x + 10 < 0$.

2) Resolver caso a), es decir despejar x.

$y_n = -5x + \frac{2}{7} \leq 0$; se tiene despejando x, $-5x \leq -\frac{2}{7}$ y luego (al multiplicar por $-\frac{1}{5}$, se cambia la desigualdad) $x \geq -\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{5}\right), x \geq \frac{2}{35}$. El intervalo es $[\frac{2}{35}, \infty)$.

$y_d = -5x+10 > 0$; se tiene despejando x, $-5x > -10$ y luego (al multiplicar por $-\frac{1}{5}$, se cambia la desigualdad) $x < -10(-\frac{1}{5}), x < 2$.El intervalo es $(-\infty, 2)$.

El intervalo es $[\frac{2}{35}, \infty) \cap (-\infty, 2) = [\frac{2}{35}, 2)$.

3) Resolver caso b), es decir despejar x.

$y_n = -5x + \frac{2}{7} \geq 0$; se tiene despejando x, $-5x \geq -\frac{2}{7}$ y luego (al multiplicar por $-\frac{1}{5}$, se cambia la desigualdad) $x \leq -\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{5}\right), x \leq \frac{2}{35}$. El intervalo es $(-\infty, \frac{2}{35}]$.

$y_d = -5x+10 < 0$; se tiene despejando x, $-5x < -10$ y luego (al multiplicar por $-\frac{1}{5}$, se cambia la desigualdad) $x > -10(-\frac{1}{5}), x > 2$.El intervalo es $(2, \infty)$.

El intervalo es $(-\infty, \frac{2}{35}] \cap (2, \infty) = \phi$.

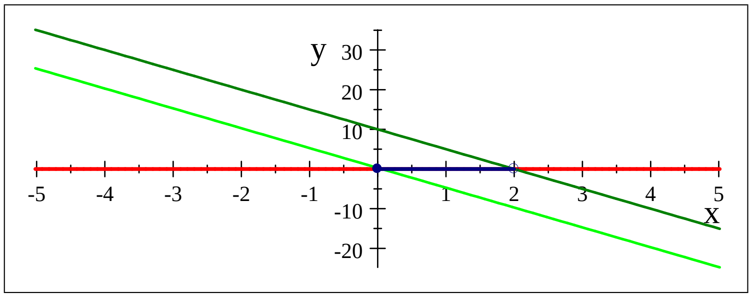
4) El intervalo solución es la unión de los intervalos de los casos 2) y 3): $[\frac{2}{35}, 2) \cup \phi = [\frac{2}{35}, 2)$.

Resolución por la interpretación gráfica:

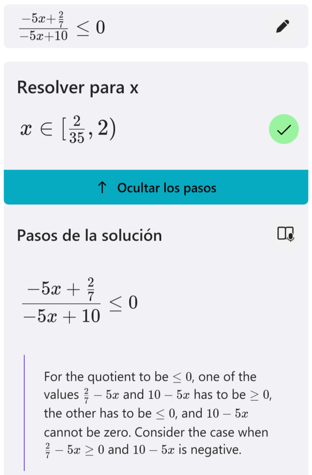
Sea $y_n = -5x + \frac{2}{7}$(en verde claro) y $y_d = -5x + 10$ (verde oscuro).

Note que $-5x + \frac{2}{7} = 0$, ocurre en $x = \frac{2}{35}$.

El intervalo solución es la linea azul o sea el intervalo $[\frac{2}{35}, 2)$.



PhotoMath obtiene la misma solución y los pasos de la solución son parecidos a los vistos en clase.



¿Como resolver el problema $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ con lo visto en esta clase?

Note multiplicando por (-1) se tiene $-\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-ax-b}{cx+d} \leq 0$.

Note que PhotoMath puede ser su auxiliar para verificar sus respuestas y ayudarlo en la resolución de problemas. Tal herramienta la tiene disponible todo el tiempo y complementa el tiempo dedicado al estudio y resolución de problemas pero no sustituye los libros y las clases y el trabajo de estudio.

¿Como determinar el dominio de la función $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ con lo visto en esta clase?

Aplicando la nota anterior.

Dar el planteamiento de solución del problema:

Una tortuga recorre una distancia dada por la función $T(t)$ donde t es el tiempo y los valores $T(t)$ se dan en metros. Una hormiga recorre una distancia dada por la función $h(t)$ donde t es el tiempo y los valores $h(t)$ se dan en metros.

Determinar el intervalo de tiempo cuando la distancia de la hormiga supere o sea igual a la de la tortuga.

Planteamiento con lo visto en clase: Se debe determinar el intervalo cuando se cumple la desigualdad: $T(t) \leq h(t)$.