1112042 Introducción al Cálculo GRUPO CAT83 TRIMESTRE 23P

Miércoles 23 de agosto de 2023. Sesión 13.

Clase de anterior

Las desigualdades: a) $ax + b \leq cx + d$, b) $ax^2 + bx + c \leq 0$, c) $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$, d) $|ax + b| \leq k$, e) $|ax + b| \geq k$ del programa analítico.

Note que PhotoMath puede ser su auxiliar para verificar sus respuestas y ayudarlo en la resolución de problemas. Tal herramienta la tiene disponible todo el tiempo y complementa el tiempo dedicado al estudio y resolución de problemas pero no sustituye los libros y las clases.

Clase de Hoy

Operaciones con funciones:

$f(x) + g(x)$,

$f(x) - g(x)$,

$f(x) * g(x)$

$f(x)/g(x)$ con $g(x) \neq 0$.

función composición $g \circ f$.

Monotonia.

Paridad.

Recordatorio: **Concepto de función**.

Una función de una variable real es una regla o una fórmula apropiada que relaciona dos conjuntos o dos intervalos de números reales. Se denota como sigue: $f : D \to R$ donde al conjunto de números de donde se parte se le llama dominio (D) y al conjunto de números resultantes de la evaluación de la función se le llama rango (R).

NOTAS:

1) El dominio debe ser un conjunto o un intervalo donde se pueda evaluar la fórmula de una función y puede ser dado o puede corresponder al conjunto de números reales donde se pueda evaluar la regla o fórmula de una función. El dominio natural es el intervalo donde se pueda evaluar la regla o fórmula de una función.

2) Para indicar el dominio o rango de una función se puede usar el nombre de la función como subindice. Por ejemplo: D_f denota el dominio de la función f y R_f denota al rango de la función f.

3) El rango debe ser el conjunto o el intervalo que corresponde a los valores de la función.

Operaciones con funciones

Sean $f : D \to R$ y $g : D \to R$ funciones de los reales a los reales apropiadas.

La suma y diferencia de funciones.

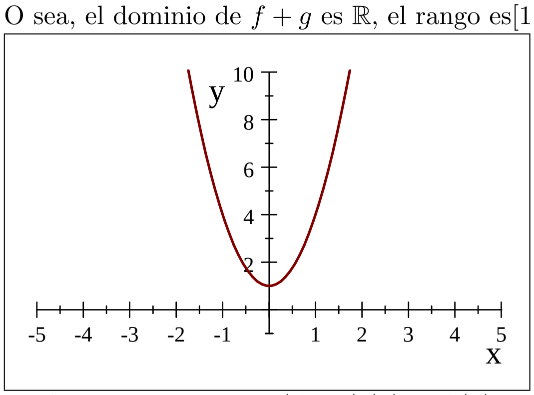
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

Por ejemplo $f(x) = 3x^2$ y sea $g(x) = 1$

En este caso se tiene $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x^2 + 1 = 3x^2 + 1$.

Por tanto $f + g : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $(f + g)(x) = 3x^2 + 1$

O sea, el dominio de $f + g$ es $\mathbb{R}$, el rango es$[1, \infty)$ y su fórmula es $3x^2 + 1$.

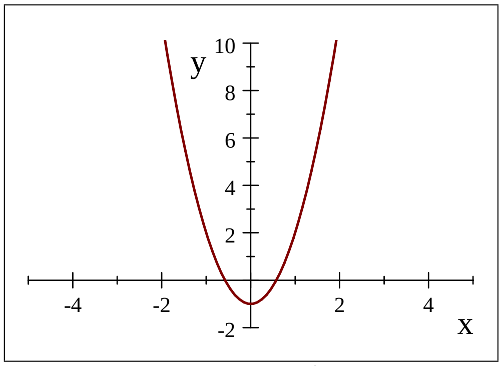


En forma analoga para $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

Y de las funciones de ejemplo se tiene: $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 3x^2 - (1) = 3x^2 - 1$.

Por tanto $f - g : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $(f - g)(x) = 3x^2 - 1$

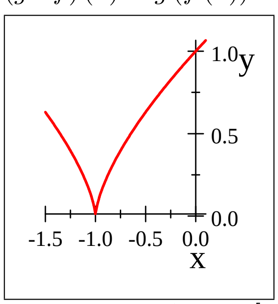
O sea, el dominio de $f - g$ es $\mathbb{R}$, el rango es$[-1, \infty)$ y su fórmula es $3x^2 - 1$.



El producto y división de funciones.
$(f * g)(x) = (fg)(x) = f(x) * g(x) = f(x)\, g(x)$.
Se acostumbra omitir el operador de multiplicación "$*$".
Ejemplso: $f(x) = 3x^2$ y sea $g(x) = 1$
En este caso se tiene $(fg)(x) = f(x)\, g(x) = \left(3x^2\right)(1) = 3x^2$.
Por tanto $fg : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $(fg)(x) = 3x^2$
El dominio de $(fg)(x)$ es $(-\infty, \infty)$.
El rango de $(fg)(x)$ es $[0, \infty)$.
Por otro lado,la división de funciones:
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$.
De las funciones de ejemplo, se tiene $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2}{1} = 3x^2$.
Por tanto $f/g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $(f/g)(x) = 3x^2$
El dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es $(-\infty, \infty)$.
El rango de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es $[0, \infty)$.

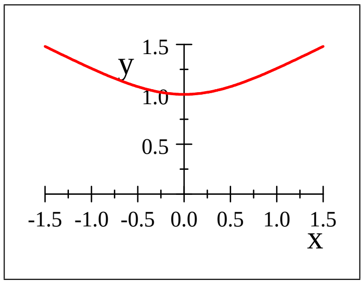
Función composición $g \circ f$.

La $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Esto quiere decir que se calcula $f(x)$ y se toma como argumento para calcular g.
Note que se cambian las funciones de ejemplo.
Por ejemplo. Sean $f(x) = x + 1$ y sea $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = \sqrt[3]{(x + 1)^2}$.



Por tanto $g \circ f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $(f \circ g)(x) = 3x^2$
El dominio de $(g \circ f)(x)$ es $(-\infty, \infty)$.
El rango de $(g \circ f)(x)$ es $[0, \infty)$.

Por otro lado:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \left(\sqrt[3]{x^2}\right) + 1 = \sqrt[3]{x^2} + 1$.



Por tanto $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$, $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1$
El dominio de $(f \circ g)(x)$ es $(-\infty, \infty)$.
El rango de $(f \circ g)(x)$ es $[1, \infty)$.

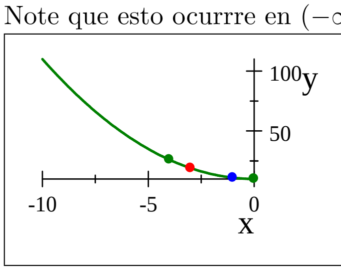
Note: La composición de funciones puede ser distinta por el orden de las funciones, o sea no es conmutativa.
Del ejemplo anterior:
$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} \neq (f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1.$

Monotonia

Se tiene dos tipos: función creciente y función decreciente.

Decreciente

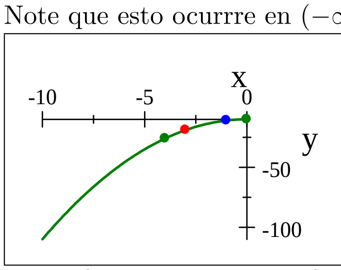
Una función es función decreciente en un intervalo I, si dada $f : D \rightarrow R$ cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$. Note que el intervalo de donde decrece debe ser un intervalo contenido en el dominio $I \subset D$.
Por ejemplo $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow [10, \infty)$, dada por $f_1(x) = 10 + x^2$.
En el intervalo $(-\infty, 0]$ la función f_1 es decreciente.
Se toman $x_1 = -3 < x_2 = -1$ se tiene $f_1(-3) = 10 + (-3)^2 = 19$, $f_1(-1) = 10 + (-1)^2 = 11$ se tiene $f_1(-3) \geq f_1(-1)$. En rojo $(-3, f_1(-3))$ y en azul $(-1, f_1(-1))$.
Note que esto ocurrre en $(-\infty, 0]$.



La gráfica muestra que la función f_1 en $(-\infty, 0]$ es decreciente.

Creciente

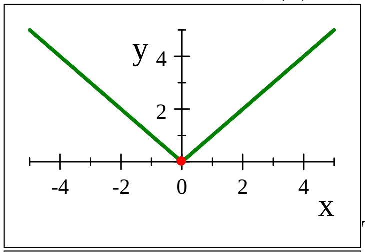
Una función es función creciente en un intervalo I, si dada $f : D \rightarrow R$ cumple que
$f(x_1) \leq f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$. Note que el intervalo de donde decrece debe ser un intervalo contenido en el dominio $I \subset D$.
Por ejemplo $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, -10]$, $f_2(x) = -10 - x^2$.
En el intervalo $(-\infty, 0]$ la función f_2 es creciente.
Se toman $x_1 = -3 < x_2 = -1$ se tiene $f_2(-3) = -10 - (-3)^2 = -19$, $f_2(-1) = -10 - (-1)^2 = -11$ se tiene $f_2(-3) \leq f_2(-1)$. En rojo $(-3, f_2(-3))$ y en azul $(-1, f_2(-1))$.
Note que esto ocurrre en $(-\infty, 0]$.



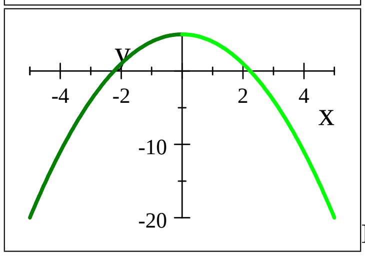
La grafica muestra que la función f_2 en $(-\infty, 0]$ es creciente.
Note que las rectas $(y = mx + b)$ con pendiente positiva $(m > 0)$ son crecientes y con pendiente negativa $(m < 0)$ son decrecientes en $\mathbb{R}$.

Funciones pares e impares.

Por la simetría de la gráfica de una función ($f : D \to R$) respecto al origen y los ejes cartesianos se tiene:
Una función es par si $f(x) = f(-x)$ para toda $x \in D$. Esto significa que es simétrica respecto al eje Y.



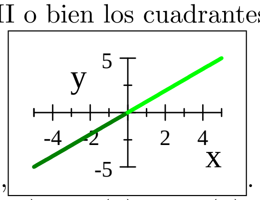
Tomando $x < 0, |x| = -x \geq 0$. Por otro lado $|-x| = x = |x|$.



Donde en verde se tiene la función $g(x) = -x^2 + 5$.

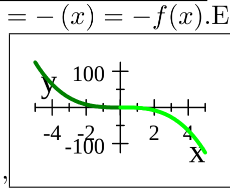
Es una función par ya que $f(-x) = -(-x)^2 + 5 = -x^2 + 5 = f(x)$.

Una función es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda $x \in D$. Esto significa que es simétrica respecto a los cuadrantes I y III o bien los cuadrantes II y IV.

Sea $f(x) = x$, 

.

Note que $f(-x) = -(x) = -f(x)$.En este caso la simetría es en los cuadrantes I y III. Con $f(-x) = -f(x)$.

Sea $f_2(x) = -x^3$, 

Note que en este caso la simetría es en los cuadrantes II y IV. Además
$f_2(-x) = -(-x)^3 = -((-1)(x))^3 = -(-1)^3(x)^3 = -\left(-x^3\right) = -f_2(x)$. O sea $f_2(-x) = -\ f_2(x)$.

Note que la paridad de una función es respecto de sus simetrías.

Ejemplo del 1er examen parcial.

Parte I

1. (*)(15 puntos) Resolver las siguientes desigualdades. Expresar las soluciones usando notación de intervalos.
   a) $x^2 - 5x + 6 > 0$.
   b) $\frac{3x+1}{2x-7} \leq 0$.
2. Sea la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} + 1 & \text{si } -10 < x < -4 \\ -2x + 1 & \text{si } |x| \leq 4 \\ (x-8)^2 - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

· Elaborar el bosquejo de la gráfica de $f(x)$.
· Determinar el dominio y las raíces (ceros).
· Determinar la paridad, el rango (imagen) y los intervalos de monotonía.
· Encontrar los intervalos donde $f(x) \leq 0$.