1112042 Introducción al Cálculo GRUPO CAT83 TRIMESTRE 23P
Martes 5 y miercoles 6 de septiembre . Sesiones: 15 Y 16.

Clase de anterior

lunes 4 de septiembre. 1er examen Parcial

Clase de Hoy

Solución del 1er examen parcial, entrega calificaciones y revisión del examen por los alumnos. Funciones polinomiales. Función Racional, división de polinomios y puntos fijos y removibles.

Funciones polinomiales y racionales.

Funciones polinomiales

Una función polinomial corresponde con las expresiones llamadas polinomios, lo cuales tienen varios monomios de la forma $a_n x^n$ donde a_n es un número real (coeficiente) y x es la variable que toma valores reales.

La expresión general es $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$.

El grado del polinomio es el exponente del monomio mayor.

Ejemplo $p_1(y) = -2 + \frac{2}{3}y + 4y^3$.

Es de grado 3 y tiene los coeficientes $a_0 = -2, a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = 0, a_3 = 4$.

Los polinomios de grado n tienen a lo más n raices reales.

Nota. El Teorema fundamental de Algebra dice que tiene exactamente n raices en los números complejos.

Note que si se tienen numeros reales distintos $r_0, r_1, ..., r_n$ se puede construir un polinomio factorizado como $(x - r_0)(x - r_1) \cdots (x - r_n)$.

Donde el monomio de mayor grado es x^n y monomio de grado 0 es $(-1)^n \, r_0 r_1 \cdots r_n$.

O sea si un polinomio tiene n raices reales se puede factorizar en factores y tiene n raices. Sin embargo, los polinomios de grado par, por ejemplo los de grado 2, pueden no tener raices reales. Por eso el Teorema Fundamental del Algebra cuando se aplica que los polinomios de grado n de numeros reales tienen a lo más n raices reales. (Nota: en los números complejos tienen exactamente n raices complejas).

Los polinomios de grado n impar, siempre tienen al menos una raiz real porque si x es muy grande $p(x)p(-x) < 0$. Hay un cambio de signo y los polinomios son funciones continuas y por tanto tiene al menos una raiz.

Por otro, lado los polinomios de grado n par, podrían no tener ninguna raíz real, o una de multiplicidad 2 [son factores de la forma $(x - r_1)^2$] o al menos 2 raices reales.

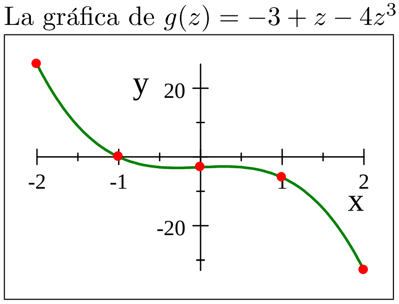
Siempre es posible, después de encontrar una raiz, factorizar por división a un polinomio dado para tratar de determinar sus raices. O sea: $\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n}{x - r_1} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$ donde

$\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}\right)(x - r_1) =$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$.

Las raices de los polinomios son los ceros, o sea los x_i tales que $p(x_i) = 0$.

Ejemplo. Sea $g(z) = -3 + z - 4z^3$, notemos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Los ceros se obtienen de
$-3 + z - 4z^3 = 0$. Note que $z_1 = -1$ es una raiz o sea un cero de g.
$g(-1) = -3 + (-1) - 4(-1)^3 = -3 - 1 + 4 = -4 + 4 = 0$.

La gráfica de $g(z) = -3 + z - 4z^3$(verde) es



donde $z_1 = -1$ es la única raiz o sea un cero de g(punto de color rojo).

$g(-2) = 27$	
$g(-1) = 0$	$g(1) = -6$
$g(0) = -3$	$g(2) = -33$

$\frac{-3 + z - 4z^3}{z + 1} = -4z^2 + 4z - 3$

Por división de polinomios se obtiene una factorización.

Ejemplo de la dívisión de polinomios.

$$-4z^2+4z-3$$

$z+1$ | $-4z^3+z-3$

(cambia signo para restar) $+4z^3+4z^2$

$4z^2+z-3$

(cambia signo para restar) $-4z^2-4z$

$-3z-3$

(cambia signo para restar) $+3z+3$

0

$g(z)=-3+z-4z^3=(z+1)\left(-4z^2+4z-3\right).$

Note que el factor $-3+4z-4z^2=a+bx+cx^2$ no tiene raices reales y que el discriminante $d=-b^2-4ac=-4^2-4\,(-3)\,(-4)=-16-12\,(4)=-16-48=-64<0$ es negativo.

Note que las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir.

Funciones racionales.

Las funciones racionales son cociente de polinomios reales.

Por ejemplo

$f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{-3+x-4x^3}$

Dominio es el intervalo donde el divisor no es cero.

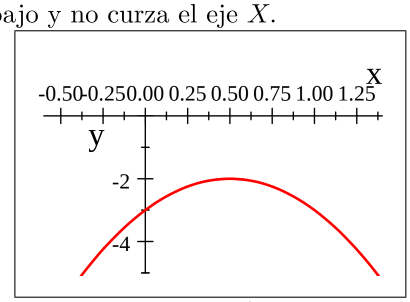
Los puntos donde se anula el polinomio divisor son puntos de discontinuidad y son de dos tipos: fijo y removible.

Los puntos de discontinuidad removibles son aquellos que corresponde con las raices iguales del divisor y del numerador.

Por ejemplo, factorizando los polinomios de la función f se tiene:

$\frac{x^2-1}{-3+x-4x^3}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(-4x^2+4x-3)}$

Note que $-4x^2+4x-3$ es un polinomio cuadrático sin raices reales. O sea es una parabola que abre hacia abajo y no curza el eje X.



Por otro lado de la factorización se tiene:

$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(-4x^2+4x-3)}=\frac{x-1}{-4x^2+4x-3}.$

Por tanto $x=-1$ es un punto de discontinidad removible (desapare por simplificación)

y como $-4x^2+4x-3$ no tiene raices reales, la división por este polinomio no tiene restricciones y el dominio de la función f es $\mathbb{R}$.

La nueva formula de f es $f(x)=\frac{x-1}{-4x^2+4x-3}$

Ahora los ceros corresponden al numerador igual a 0.

En este ejemplo para f se tiene un único cero en $x=1$.

Cuando el divisor de una función racional tiene una raíz que no se puede simplificar, se tiene tiene una discontinuidad fija o esencial:

En resumen para el ejemplo de $f(x)=\frac{x^2-1}{-3+x-4x^3}$.

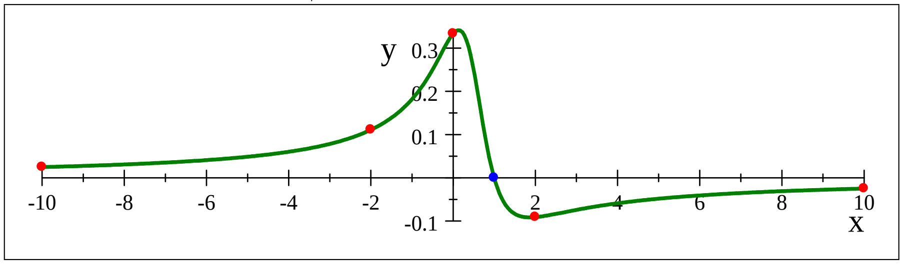
El divisor es $-3+x-4x^3=(x+1)\left(-4x^2+4x-3\right)$ tiene un cero en $x_1=-1$.

Esto sugiere antes de la factorización y simplificación que el dominio de f es $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$.

El numerador es $x^2-1=(x+1)\,(x-1)$ sus ceros son $x_2=-1$ y $x_3=1$.

Reescribiendo $f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{-3+x-4x^3}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(-4x^2+4x-3)}=\frac{x-1}{-4x^2+4x-3}.$

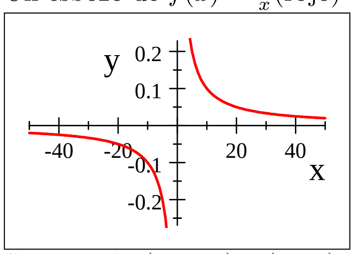
Note que se quito $x_1 = -1$ es decir se trata de una discontiuidad removible.
Por tanto el dominio de f es $\mathbb{R}$.
Y el cero de f es en $x_3 = 1$.
La gráfica de $f(x) = \frac{x-1}{-4x^2+4x-3}$ (verde), su únca raiz en $x = 1$ (punto azul) es



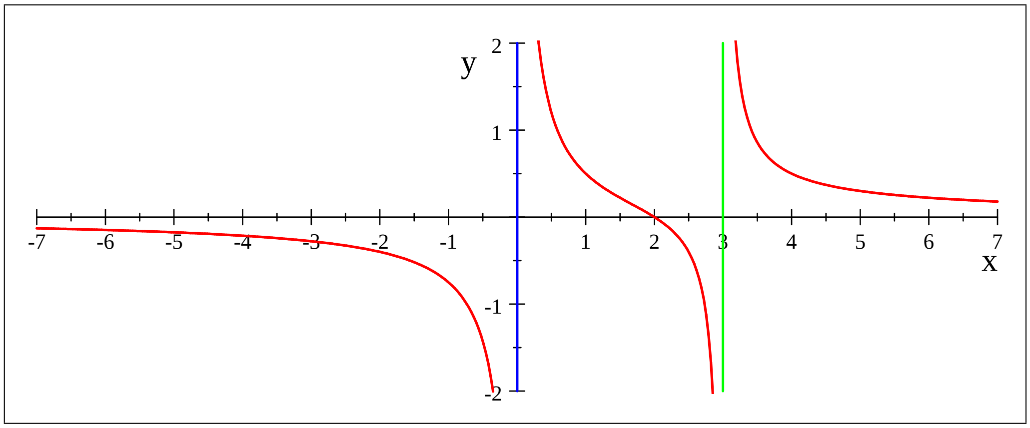
La siguiente tabla son puntos de la función f que se muestran en rojo.

$f(-10) = \frac{11}{443}$	$f(10) = -\frac{3}{121}$
$f(-2) = \frac{1}{9}$	$f(2) = -\frac{1}{11}$
$f(0) = \frac{1}{3}$	

Ejemplo 1.
Sea $h(x) = \frac{1}{x}$.
Determinar sus puntos de discontinuidad fijos y removibles, su dominio, rango y realizar un esbozo.
RESPUESTA.
$h(x) = \frac{1}{x}$
Es una función racional del cociente del polinomio constante 1 y el divisor es el polinomio x.
Como no se pueden simplificar, se tiene que $x = 0$ es una raiz del divisor y es un punto de disconitnuidad fijo o esencial.
Un esbozo de $f(x) = \frac{1}{x}$(rojo)



Se tiene $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
O sea $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ejemplo 2.
Sea $j(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-3x}$
Determinar sus puntos de discontinuidad fijos y removibles, sus ceros, su dominio, su rango y realizar un esbozo.
RESPUESTA.
Se factorizan los polinomios numerador: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$,
y divisor: $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x+1)(x-3)$.
Las raices del divisor son $-1, 0, 3$, o sea los puntos de disconitnuidad.
Se sustituyen las factorizaciones y se simplifica:
$j(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-3x} = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{x-2}{x(x-3)}$.
Como se cancela el factor $(x+1)$, el punto $x_1 = -1$ es una dsiconitnuidad removible.
Mientras que $x_0 = 0$ y $x_2 = 3$ son discontinuidades fijas.
La raiz del polinomio numerador ($x_3 = 2$) es una raiz de la función j.
La versión simplificada es $j(x) = \frac{x-2}{x(x-3)}$.
Por tanto el dominio de j es $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$
Un esbozo de j es



De la gráfica se obtiene que su rango es $\mathbb{R}$.
La linea azul corresponde al punto de disconitnuidad esencial $x_0 = 0$.
La linea verde corresponde al punto de disconitnuidad esencial $x_3 = 3$.
Tales lineas son las asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 3$ respectivamente.
Notación.
Sea v un valor real dado.
$x \to v^-$ significa que nos acercamos a v por la izquierda.
$x \to v^+$ significa que nos acercamos a v por la derecha.
En el caso de la grafica de j observe que se tiene lo siguiente:
Cuando $x \to 0^-$ la función $j(x) \to -\infty$ (se lee tiende a menos infinito).
Cuando $x \to 0^+$ la función $j(x) \to \infty$ (se lee tiende a infinito).
Cuando $x \to 3^-$ la función $j(x) \to -\infty$ (se lee tiende a menos infinito).
Cuando $x \to 3^+$ la función $j(x) \to \infty$ (se lee tiende a infinito).