1112042 Introducción al Cálculo GRUPO CAT83 TRIMESTRE 23P
Lunes11 de septiembre . Sesión: 19.

Clase de anterior

Funciones polinomiales.
Función Racional, división de polinomios y puntos fijos y removibles.
Límite en un punto y Tarea obligatoria 3.

Clase de Hoy

Ver el libro de texto. Cálculo de una variable, George B. Thomas, 12 ed., Pearson. sección 1.3 Funciones trigonometricas.

Funciones trigonométricas.

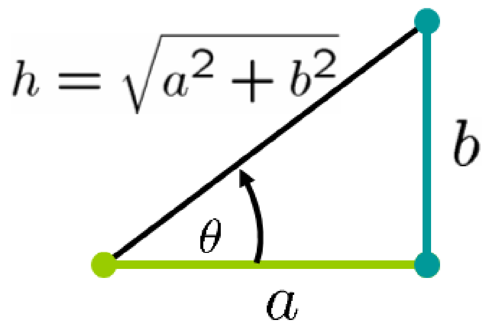
Desplazamientos verticales y horizontales,reflexiones, elongaciones y contracciones de la gráfica de una función. Funciones trigonométricas. Funciones periódicas. Amplitud, periodo, traslación.

Una función es periodica si existe un valor $T > 0$ (se toma el más pequeño) tal que
$f(x) = f(x + T)$.

Nota: significa que se repite despues del periodo T.

Las funciones trigonométricas son funciones periodicas que se repiten cada 2π radianes, o sea cada vuelta de un circulo unitario.

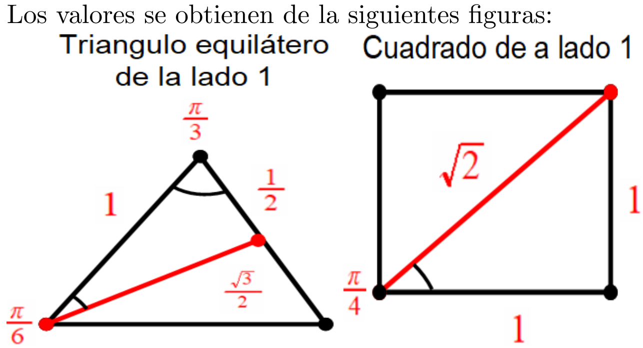
Se definen con base en un triángulo rectángulo.



Seno: $\sin(\theta) = \frac{b}{h}$; Coseno $\cos(\theta) = \frac{a}{h}$; Tangente: $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$;
Cotangente: $\cot(\theta) = \frac{a}{b}$; Secante: $\sec(\theta) = \frac{h}{a}$; Cosecante: $\csc(\theta) = \frac{h}{b}$
NOTE: $\sin(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)}$; $\cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)}$; $\tan(\theta) = \frac{1}{\cot(\theta)}$.

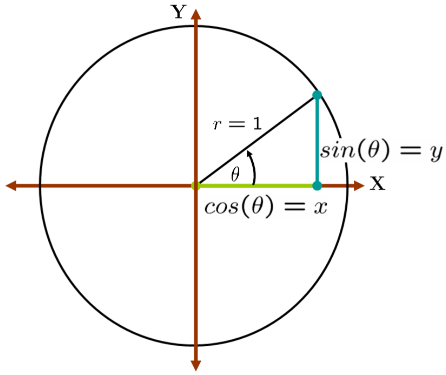
Ángulos notables:
0 grados: $\sin 0 = 0; \cos 0 = 1$
30 grados: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
45 grados: $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
60 grados: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
90 grados: $\sin\frac{\pi}{2} = 1; \cos\frac{\pi}{2} = 0.$
$\sqrt{2}$

Los valores se obtienen de la siguientes figuras:

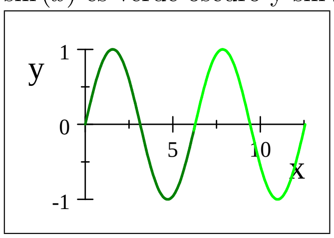


Todas las medidas angulares deben ser en radianes, ya que estos relacionan de forma natural la distancia sobre la circunferencia como el ángulo.

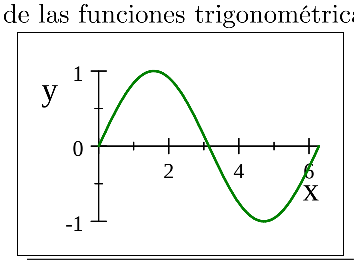
Las funciones seno y coseno definidas por medio del círculo trigonométrico.
En particular para una circunferencia de radio 1, se tiene:

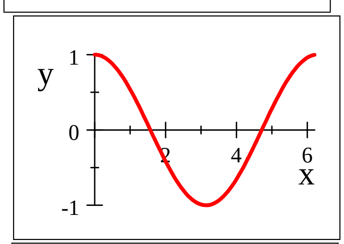


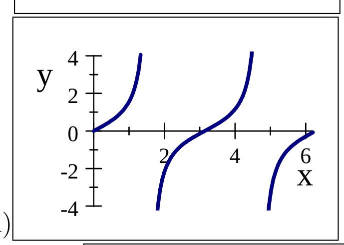
El dominio natural es todos los reales.
El dominio del primer ciclo se puede considerar como $[0, 2\pi]$.
O sea: $\sin(x) = \sin(2\pi + x)$. El periodo es 2π.
$\sin(x)$ es verde oscuro y $\sin(2\pi + x)$ es verde claro

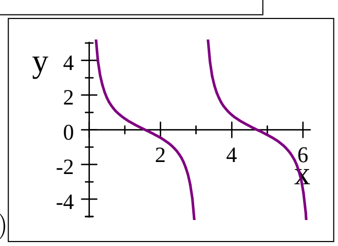


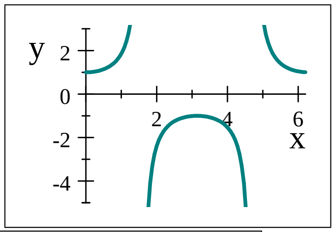
Las graficas de las funciones trigonométricas en $[0, 2\pi]$.

seno(verde)


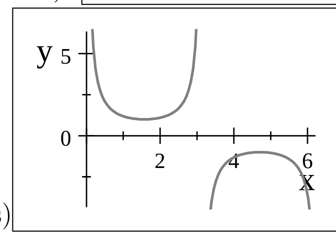
coseno (rojo)


tangente(azul)


cotangente(purpura)




secante(verde azul)



cosecante(gris)

NOTAS:

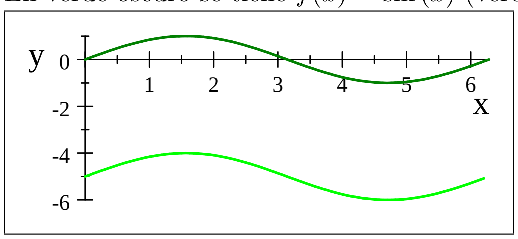
Desplazamientos verticales y horizontales,reflexiones, elongaciones y contracciones de la gráfica de una función.

Un desplazamiento vertical o traslación vertical de una función consiste en sumar un valor a la función: $f(x)+T$.

Por ejemplo: Sea $f(x) = \sin(x)$,

Para trasladarla verticalmente a -5 se le suma, o sea $f(x) - 5$.

En verde oscuro se tiene $f(x) = \sin(x)$ (verde oscuro) y en verde claro: $f(x) - 5$.

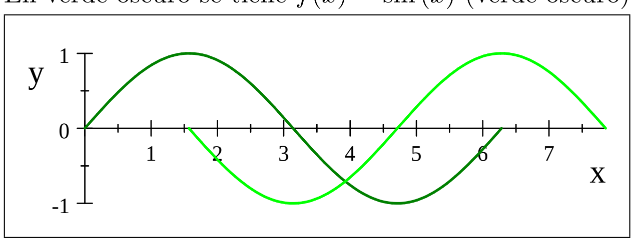


Un desplazamiento horizontal o traslación horizontal de una función consiste en sumar un valor al argumento de una función: $f(x - h)$.

Por ejemplo: Sea $f(x) = \sin(x)$.

Para trasladarla horizontamente $\frac{\pi}{2}$ se toma $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

En verde oscuro se tiene $f(x) = \sin(x)$ (verde oscuro) y en verde claro: $f(x + \frac{\pi}{2}) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.



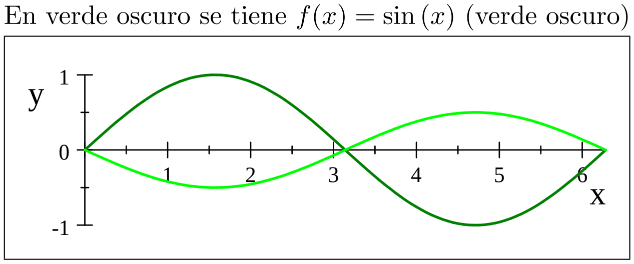
Para las reflexiones, elongaciones y contracciones se obtienen multiplicando por un factor.

Cuando el factor es negativo, se obtiene una reflexión. Cuando en valor absoluto es mayor a 1 se obtiene una amplificación o elengación y cuando en valor absoluto es menor a 1 se obtiene una contracción o disminución de la amplitud.

Por ejemplo: Sea $f(x) = \sin(x)$,

Para una contracción y reflexión por -0.5 se toma $-0.5 \sin(x)$.

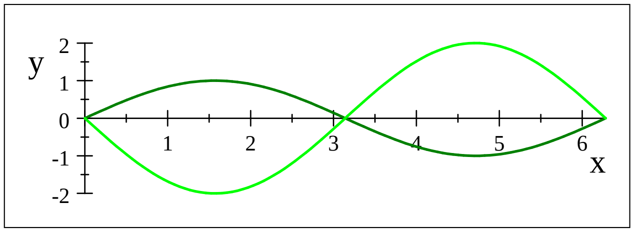
En verde oscuro se tiene $f(x) = \sin(x)$ (verde oscuro) y en verde claro: $-0.5f(\frac{\pi}{2}) = -0.5 \sin(x)$.



Por ejemplo: Sea $f(x) = \sin(x)$,

Para una elongación de 2 se toma $2\sin(x)$.

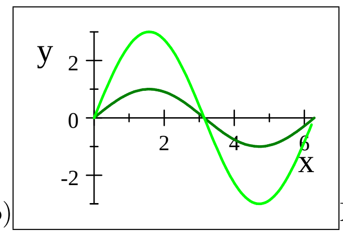
En verde oscuro se tiene $f(x) = \sin(x)$ (verde oscuro) y en verde claro: $2f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin(x)$.



Todo lo anterior se usa para facilitar la graficación de las funciones trigonométricas.

Para las funciones periodicas la amplitud es un factor$\neq$0, que la multiplica para amplificar, reducir e invertir (<0).

Por ejemplo $3\sin(x)$(verde claro)

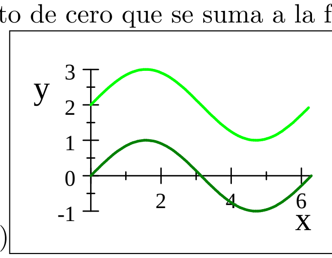


Note que $3\sin(x)$ cambia la amplitud de sin(x) de [-1,1] a [-3,3].

La amplitud de $3\sin(x)$ es 3.

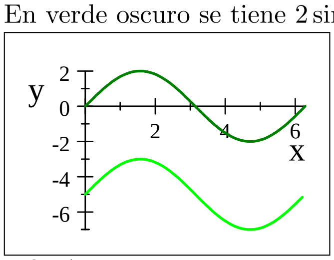
Una traslación es un número distinto de cero que se suma a la función.

Por ejemplo $\sin(x) + 2$ (verde claro)



Entonces graficar $2\sin(x) - 5$ se puede hacer por pasos:

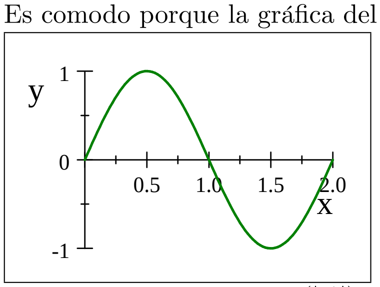
En verde oscuro se tiene $2\sin(x)$ (verde oscuro) y luego se traslada -5 que es el resultado en verde claro.



NOTA:

La multiplicación del ángulo por π, cambia la escala del eje X.

Es comodo porque la gráfica del seno $(\sin(\pi x))$ es ahora en el intervalo $[0, 2]$.



Para obtener la amplitud ($|A|$), el periodo ($|B|$), el corrimiento (C)y la traslación (D) se usa la fórmula general de sinusoides:

$$f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{B}(x-C)\right) + D$$

Por ejemplo:

Determinar la amplitud ($|A|$), el periodo ($|B|$), el corrimiento (C)y la traslación (D) de la función:

$h(x) = -3\sin(3\pi x + 1) - 2$

RESPUESTA.

Los parámetros A y D son directos.

Para el periodo y corrimiento se requiere igualar los argumentos de la función dada y de la formula de los sinusoides.

$3\pi x + 1 = \frac{2\pi}{B}(x-C)$.

Desarrollando el lado derecho se tiene $\frac{2\pi}{B}(x-C) = \frac{2\pi}{B}x - \frac{2\pi}{B}C$.

O sea se tiene la igualdad de dos polinomios lineales:

$3\pi x + 1 = \frac{2\pi}{B}x - \frac{2\pi}{B}C$.

Y para que sean iguales se requiere la igualdad de sus coeficientes:

Para $x : 3\pi = \frac{2\pi}{B}$. Despejando $B = \frac{2}{3}$.

Para el termino independiente: $1 = -\frac{2\pi}{B}C$. Despejando $C = -\frac{1}{2\pi}B$, sustituyendo B, se tiene:

$C = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3\pi}$.

Comprobación de que B y C son los coeficientes: $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}\left(x - \left(-\frac{1}{3\pi}\right)\right) = 3\pi x + 1$. O sea se obtiene el polinomio del argumento de h.

Reescribiendo h se tiene:

$$h(x) = -3\sin\left(\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}\left(x - \left(-\frac{1}{3\pi}\right)\right)\right) - 2.$$

Por tanto la amplitud $|A| = 3$, el periodo $|B| = \frac{2}{3}$,el corrimiento $C = -\frac{1}{3\pi}$ y la traslación $D = -2$.

Para calcular límites se usan dos aproximaciones especiales para águlos muy pequeños:

$$\begin{aligned}\sin\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2\end{aligned}$$

Las cuales tienen como consecuencias en el cálculo de los límites trigonométricos siguientes:

$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \approx \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\theta} = 1$.

$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} \approx \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1}{2}\theta^2}{\theta} = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0}\theta = 0$.

Por ejemplo:

Determinar los límites:

a) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^5\theta}{\theta^2}$.

b) $\lim_{\theta\to 0}\sec(\theta)$.

RESPUESTA de a)

Por medio de la aproximación del seno para angulos pequeños se tiene:

a) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^5\theta}{\theta^5} \approx$a) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^5}{\theta^5} = \lim_{\theta\to 0} 1 = 1$.

RESPUESTA de b)

Usano la eqquivalencia de la sec y el coseno:

b) $\lim_{\theta\to 0}\sec(\theta) = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos(\theta)}$.

Por medio de la aproximación del coseno para angulos pequeños se tiene:

$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos(\theta)} \approx \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\theta^2} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\theta^2}$.

Note que el divisor se puede calcular: $\lim_{\theta\to 0}\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) = \lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2}\theta^2 = 1 - 0 = 1$.

Por tanto $\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\theta^2} = \frac{1}{1} = 1$.

O sea, $\lim_{\theta\to 0}\sec(\theta) = 1$.

Fórmulas trignonometricas:

Suma de cuadrados

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
Suma de ángulos:
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
Doble del ángulo:
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.
(usando la suma de cuadrados)
$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.