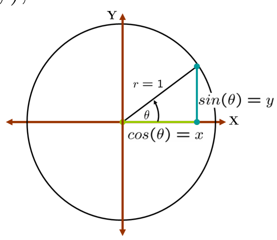
1112042 Introducción al Cálculo GRUPO CAT83 TRIMESTRE 23P
Lunes19 a jueves 21 de septiembre . Sesiones: 20,21,22.

# Clase de anterior

Desplazamientos verticales y horizontales,reflexiones, elongaciones y contracciones de la gráfica de una función. Funciones trigonométricas. Funciones periódicas. Amplitud, periodo, traslación.

Todas las medidas angulares deben ser en radianes, ya que estos relacionan de forma natural la distancia sobre la circunferencia como el ángulo.

Las funciones seno y coseno definidas por medio del círculo trigonométrico corresponden a las coordenadas (x,y), como se muestra en la figura.




Para obtener la amplitud ($|A|$), el periodo ($|B|$), el corrimiento ($C$)y la traslación ($D$) se usa la fórmula general de sinusoides:

$$f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

Para calcular límites se usan dos aproximaciones especiales para águlos muy pequeños:

$$\begin{aligned} \sin\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \end{aligned}$$

Fórmulas trignonometricas:
Suma de cuadrados
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
Suma de ángulos:
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
Doble del ángulo:
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.
(usando la suma de cuadrados)
$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.

# Clase de Hoy

Continuidad y límites.
Leyes de los límites.
Teorema de la compresión o del Sándwich.
(Regla de L' Hôpital que no es de este curso, para su conocimiento y uso para verificación de resultados)
Definición. Una función es continua en un intervalo si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.
NOTAS:

1) Al reconocer que las funciónes son continuas y que el cálculo de su límite no es de la forma indeterminada $0/0, \infty/\infty, \infty \cdot 0, \infty - \infty$, se procede por evaluación directa.

2) Al reconocer a funciones continuas, se aplican las leyes de los límites:
Sean $L, M, c$ y $k$ valores reales, $f$ y $g$ funciones continuas apropiadas.
$\lim_{x\to c} f(x) = f(\lim_{x\to c} x) = f(c) = L$.
$\lim_{x\to c} g(x) = g(\lim_{x\to c} x) = g(c) = M$.
Regla de la suma: $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + g(\lim_{x\to c} x) = L + M$.
Regla de la diferencia: $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - g(\lim_{x\to c} x) = L - M$.

Regla del multiplo constante: $\lim_{x\to c}(kf(x)) = k\lim_{x\to c} f(x) = kL$.

Regla del producto: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot g(\lim_{x\to c} x) = L\cdot M$.

Regla del cociente: $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to c} f(x)/g(\lim_{x\to c} x) = L/M$, con $M \neq 0$.

Regla de la potencia: $\lim_{x\to c}(f(x))^n = (\lim_{x\to c} f(x))^n = L^n$.

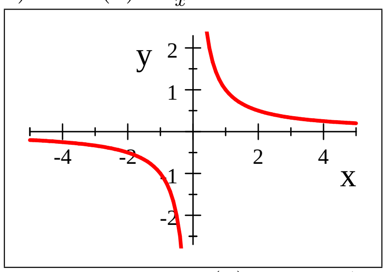
Regla de la raiz: $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $n$ entero positivo, para $n$ par se debe tener $L \geq 0$.

3) Se asume que para funciones continuas se cumple que el límite pasa dentro del argumento: $\lim_{x\to c} f(x) = f(\lim_{x\to c} x)$ siempre que el punto o tenga problemas a la derecha e izquierda de $c$. Además $x \to c$ significa que se puede aproximar por valores a la derecha e izquierda de $c$.

4) Regla de L' Hôpital: $\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f'(x)}{\lim_{x\to c} g'(x)}$ donde $f\prime$ y $g'$ son las derivadas correspondientes.

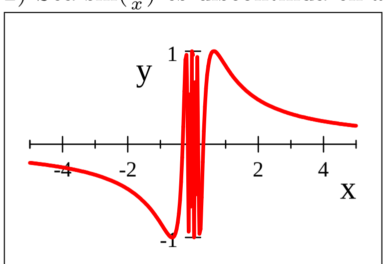
Ejemplos de funciones continuas y discontinuas:

1) Sea $h(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x = 0$.




Ya que $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -\infty \neq \lim_{x\to 0^+} h(x) = \infty$

2) Sea $\sin(\frac{1}{x})$ es discontinua en $x = 0$.




Ya que $\lim_{x\to 0^-} \sin(\frac{1}{x})$ y $\lim_{x\to 0^+} \sin(\frac{1}{x})$ no existen, cuando $x \to 0^-$ y $x \to 0^+$, la función oscila entre valores en el intervalo $[-1, 1]$.

| $0^-$ | $0^+$ |
|---|---|
| $\sin(\frac{1}{-0.001}) = -0.826\,88$ | $\sin(\frac{1}{0.001}) = 0.826\,88$ |
| $\sin(\frac{1}{-0.0001}) = 0.305\,61$ | $\sin(\frac{1}{0.0001}) = -0.305\,61$ |
| $\sin(\frac{1}{-0.000001}) = 0.349\,99$ | $\sin(\frac{1}{0.000001}) = -0.349\,99$ |
| $\sin(\frac{1}{-0.0000001}) = -0.420\,55$ | $\sin(\frac{1}{0.0000001}) = 0.420\,55$ |

Entonces no existe $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ o sea, la función es discontinua.

3) Sea $x\sin(\frac{1}{x})$ es continua en $x = 0$.

Teorema de la compresión o del Sándwich.

Si para todo valor alrededor de $c$ se cumple:

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ y se tiene que $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$.

Entonces $\lim_{x\to c} h(x) = f(\lim_{x\to c} x) = \lim_{x\to c} g(x)$.

Se tiene que $\left|x\sin(\frac{1}{x})\right| \leq |x| \left|x\sin(\frac{1}{x})\right|$.

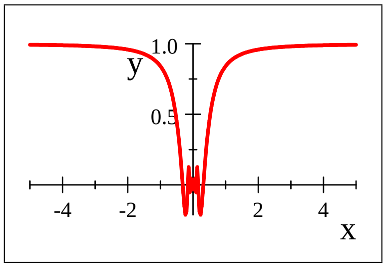
Entonces $0 \leq \left|x\sin(\frac{1}{x})\right| \leq |x| \left|x\sin(\frac{1}{x})\right| \leq |x|$

Como $\lim_{x\to 0} 0 = 0$, $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Por el teorema del Sándwich: $\lim_{x\to 0} \left|x\sin(\frac{1}{x})\right| = 0$, O sea

$\lim_{x\to 0}\left(x\sin(\frac{1}{x})\right) = 0$.

Por tanto la función $x\sin(\frac{1}{x})$ es continua en todos los números reales.




Determinar los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{x(\cos(3x))^3}$.

Respuesta.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{x(\cos(3x))^3}$ =(Por reglas de los límites y como no es una forma indeterminada) $\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \sin(3x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} x\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos(3x)\right)^3} =$

$\frac{\sin(3\frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3}\left(\cos\left(3\frac{\pi}{3}\right)\right)^3} = \frac{\sin(\pi)}{\frac{\pi}{3}(\cos(\pi))^3} = \frac{0}{-\frac{1}{3}\pi} = 0.$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\csc(3x)}{x(\cot(3x))^3}$.

RESPUESTA.

Usamos desigualdades trigonometricas:

$\lim_{x\to 0} \frac{\csc(3x)}{x(\cot(3x))^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin(3x)}}{x\left(\frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}\right)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(3x)}{x\sin(3x)\cos^3(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x\cos^3(3x)} \approx$

$\lim_{x\to 0} \frac{(3x)^2}{x\cos^3(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{9x}{\cos^3(3x)} = \frac{\lim_{x\to 0} 9x}{\lim_{x\to 0}\cos^3(3x)} = \frac{9\lim_{x\to 0} x}{\cos^3(\lim_{x\to 0} 3x)} = \frac{0}{1} = 0.$

b) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{3x^2+3x-18}{\sqrt{x^2+5}-3}\right)$

RESPUESTA.

$\frac{3x^2+3x-18}{\sqrt{x^2+5}-3}$ no se puede sustituir porque resulta una forma indeterminada.

Se multiplica por el conjugado apropiado:

$\frac{3x^2+3x-18}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

Se tiene:

$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+3x-18}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(3x^2+3x-18\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(3x^2+3x-18\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x+2)(x-2)} =$

(una forma de eliminar la division entre cero, es considerar si se simplifica

$\frac{3x^2+3x-18}{x-2}$

Realizando la división:

$$\begin{array}{ccc} & & 3x+9 \\ & \lceil & -------- \\ x-2 & | & 3x^2+3x-18 \\ & | & -3x^2+6x \\ & & 9x-18 \\ & & -9x+18 \\ & & 0 \end{array}$$

Sustituyendo, se tiene entonces que

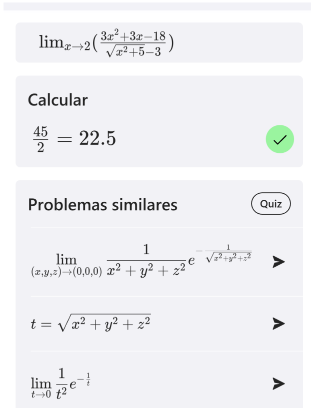
$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+3x-18}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{(3x+9)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x+2)} =$

$\frac{\lim_{x\to 2}(3x+9)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\lim_{x\to 2}(x+2)} =$

(ya se puede sustituir)

$\frac{(3(2)+9)\left(\sqrt{(2)^2+5}+3\right)}{((2)+2)} = \frac{(15)(6)}{4} = \frac{90}{4} = \frac{45}{2}.$

Una forma de verificar es por PhotoMath




y otra forma es por medio de una tabla de aproximaciones usando alrededor de 2.
Sea $j(x) = \frac{3x^2+3x-18}{\sqrt{x^2+5}-3}$, los cálculos se realizan con una buena calculadora cientifica:

$$\begin{array}{cc} 2^- & 2^+ \\ j(1.99) = 22.486 & j(2.01) = 22.514 \\ j(1.999) = 22.499 & j(2.001) = 22.501 \\ \downarrow & \downarrow \\ 22.5 & 22.5 \end{array}$$

Note que existen los limites laterales, son iguales y por tanto
$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+3x-18}{\sqrt{x^2+5}-3} = 22.5$

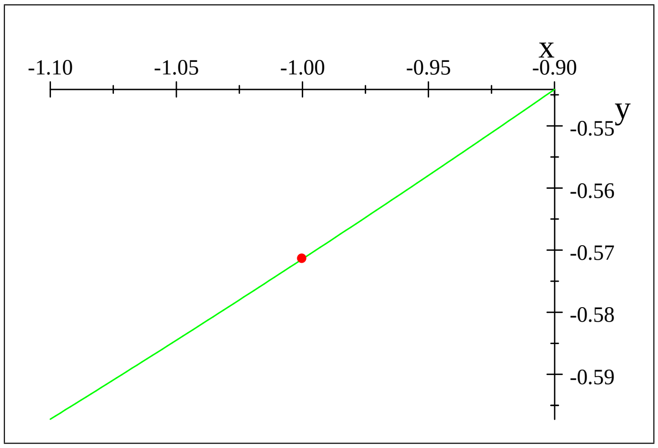
2. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+11x+7x^2}}{2x}$.
RESPUESTA.
Para límites al infinito se cambia cocientes apropiados de la variable.
Se hace un cambio de variable $x = -y$ y el límite cambia a $+\infty$.
$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+11x+7x^2}}{2x} = \lim_{y\to\infty} \frac{\sqrt{1+11(-y)+7y^2}}{2(-y)} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} =$
$\lim_{y\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{11x}{y^2}+\frac{7y^2}{y^2}}}{-2\frac{y}{y}} =$
(se simplifica y aplican las reglas de los límites)
$\lim_{y\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{11}{y}+7}}{-2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{x^2} + \lim_{y\to\infty}\frac{11}{y} + \lim_{y\to -\infty} 7} = -\frac{\sqrt{7}}{2}$.
Se puede verificar por PhotoMath. O se puede verificar por medio de una tabla:
Note que $-\frac{\sqrt{7}}{2} \approx -1.3229$.
Sea $h(x) = \frac{\sqrt{1+11x+7x^2}}{2x}$, los cálculos se realizan con una buena calculadora cientifica:

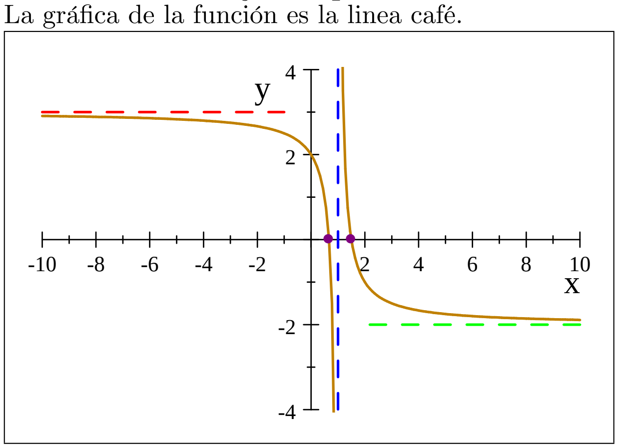
$$\begin{array}{c} -\infty \\ h(-1000) = -1.3239 \\ h(-100000) - 1.3229 \\ \downarrow \\ -1.3229 \end{array}$$

Note que existen los limites laterales, son iguales y por tanto
$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+11x+7x^2}}{2x} \approx -1.3229$.

b) $\lim_{x\to -1^-} \frac{|-3x+1|}{2x-5}. = -\frac{4}{7}$
RESPUESTA.
No hay problema al evaluar el límite
$\lim_{x\to -1^-} \frac{|-3x+1|}{2x-5} = \frac{|-3(-1)+1|}{2(-1)-5} = -\frac{4}{7}$.
Se puede verificar por PhotoMath. O se puede verificar por medio de una tabla.
O mediante una grafica de la zona cerca de $-1$. El punto $(-1, -\frac{4}{7})$ (rojo) pertenece a $\frac{|-3x+1|}{2x-5}$(verde). Note que $-\frac{4}{7} \approx -0.57143$.




Repaso de asintotas.
Verticales.
Horizontales.
Oblicuas.
Cuando no existen límites hacia $-\infty$ y $\infty$.
Ejemplos sin álgebra:
Realizar el bosquejo de una función $f$ y sus asíntotas que cumple:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$
$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to1^+} f(x) = \infty$
Tiene a lo más dos raices y es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
RESPUESTA.
$y = 1$ es una asíntota vertical (azul rayas)
$x = 3$ es una asíntota horizontal izquierda (rojo rayas)
$x = -2$ es una asíntota horizontal derecha (verde rayas)
Las raices son $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{3}{2}$ (puntos purpuras)
La gráfica de la función es la linea café.




Fórmulas geométricas para problemas de aplicación.
Perimétro es la suma de las longitudes de las aristas de una figura.
Fórmulas de área:
Triángulo: $A = \frac{bh}{2}$ donde $b$ longitud de la base y $h$ longitud de la altura.
Cuadrado: $A = l^2$ donde $l$ longitud del lado.
Rectángulo: $A = la^2$ donde $l$ longitud del lado largo y $a$ longitud del lado angosto.
Volumenes
Cubo $V = a^3$
Prisma y paralelepípedo $V = A_b h$ donde $A_b$ área base y $h$ altura.

Ortahedro: $V = lah$ donde $l$ lado, $a$ ancho, $h$ altura
Cono y piramide: $V = \frac{1}{3}A_b h$ donde $A_b$ área base y $h$ altura.
Cilindro: $V = A_b h$
Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

## Ejemplos de aplicación.

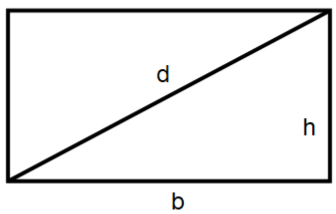
1) Dado un rectángulo que tiene una diagonal ($d$) de longitud de dos veces la base ($b$).

a) Determinar la funcion del perímetro de un rectángulo con respecto a la diagonal ($d$). Calcular el perimétro cuando $d = 5$.

b) Determinar la funcion del perímetro de un rectángulo con respecto a la base ($b$). Calcular el perimétro cuando $b = 3$.

RESPUESTAS.

1) La siguiente figura muestra un rectangulo de diagonal (d) y base (b).




Para a)
La longitud del lado por la fórmula de Pitagoras es $h = \sqrt{d^2 - b^2}$.
El perímetro esta dado por la fórmula: $P = 2\,(b + h)$.
Como $d = 2b$ se despeja $b = \frac{d}{2}$. Se sustituye en $h = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$
La anterior se combina en la fórmula del perimetro. $P = 2\left(\frac{d}{2} + \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right) = d + \sqrt{3}\sqrt{d^2} = d + \sqrt{3}d = \left(1 + \sqrt{3}\right) d$
La función pedida es $P(d) = \left(1 + \sqrt{3}\right) d, P : [0, \infty) \to [0, \infty)$.
El perímetro cuando $d = 5$, se obtiene evaluando $P(5) = \left(1 + \sqrt{3}\right)(5) \approx 13.66$.
Para b)
El perímetro es $P = 2\,(b + h)$.
La longitud del lado por la fórmula de Pitagoras es $h = \sqrt{d^2 - b^2}$.
El perímetro esta dado por la fórmula: $P = 2\,(b + h)$.
Como $d = 2b$, se sustituye en la fórmula de $h = \sqrt{(2b)^2 - b^2} = \sqrt{3}\sqrt{b^2} = \sqrt{3}b$.
Se combina con el perímetro. $P = 2\left(b + \sqrt{3}b\right) = 2\left(1 + \sqrt{3}\right) b$.
La función pedida es $P_1(b) = 2\left(1 + \sqrt{3}\right) b, P_1 : [0, \infty) \to [0, \infty)$.
El perímetro cuando $b = 3$, se obtiene evaluando $P_1(3) = 2\left(1 + \sqrt{3}\right)(3) = 6\sqrt{3} + 6 \approx 16.392$.