PRIMER EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Trimestre 12-P. Junio 1 de 2012.

Grupo: CTG01 Profesor: Dr. Carlos Barrón Romero

SOLUCION.

(1)(10). Explique si existe la $g'(0)$, donde la función es

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{2}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

RESPUESTA.

Por la definición de derivada en un punto se tiene

$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \sin\left(\frac{2}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 \sin\left(\frac{2}{h}\right) = 0.$

O la tabla siguiente muestra que el limite es 0.

h	$g\prime(0) \sim h^2 \sin\left(\frac{2}{h}\right)$
0.01	$\sim \pm 0.0001$
-0.01	$\sim \pm 0.0001$
0.0001	$\sim \pm 0.00000001$
-0.0001	$\sim \pm 0.00000001$
$\to 0$	$\to 0$

Esto es que existe $g'(0) = 0$.

(2)(10). Calcular la derivada de la función

$$h(x) = 3x^2 e^{\pi x^{-1}}$$

RESPUESTA.

$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^2 e^{\pi x^{-1}}\right) = \left[\frac{d}{dx}(3x^2)\right] e^{\pi x^{-1}} + 3x^2 \left[\frac{d}{dx}\left(e^{\pi x^{-1}}\right)\right] =$

$6xe^{\frac{\pi}{x}} - 3\pi e^{\frac{\pi}{x}}.$

(3)(10). Calcular la derivada de la función

$$h(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x^4)\left(1 + \cos(2x)\right)}{\cos(x^2)}$$

RESPUESTA.

$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x^4)(1+\cos(2x))}{\cos(x^2)}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(\pi x^4)(1+\cos(2x))}{\cos(x^2)}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(x^2\right)\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\pi x^4\right)(1+\cos(2x))\right] - \sin\left(\pi x^4\right)(1+\cos(2x))\frac{d}{dx}\left[\cos\left(x^2\right)\right]}{\cos^2(x^2)}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(x^2\right)\left[\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\pi x^4\right)\right](1+\cos(2x)) + \sin\left(\pi x^4\right)\frac{d}{dx}[1+\cos(2x)]\right] - \sin\left(\pi x^4\right)(1+\cos(2x))\frac{d}{dx}\left[\cos\left(x^2\right)\right]}{\cos^2(x^2)}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(x^2\right)\left[\left[\cos\left(\pi x^4\right)\pi x^3\right](1+\cos(2x)) + \sin\left(\pi x^4\right)[-\sin(2x)2]\right] - \sin\left(\pi x^4\right)(1+\cos(2x))\left[-\sin\left(x^2\right)2x\right]}{\cos^2(x^2)}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(x^2\right)\left[\pi x^3\cos\left(\pi x^4\right)(1+\cos(2x)) - 2\sin(2x)\sin\left(\pi x^4\right)\right] + 2x\sin\left(x^2\right)\sin\left(\pi x^4\right)(1+\cos(2x))}{\cos^2(x^2)}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi x^3\cos\left(x^2\right)\cos\left(\pi x^4\right)(1+\cos(2x)) - 2\cos\left(x^2\right)\sin(2x)\sin\left(\pi x^4\right) + 2x\sin\left(x^2\right)\sin\left(\pi x^4\right)(1+\cos(2x))}{\cos^2(x^2)}\right) =$

$\frac{2\pi x^3\cos\left(x^2\right)\cos\left(\pi x^4\right) + 2\pi x^3\cos(2x)\cos\left(x^2\right)\cos\left(\pi x^4\right)}{\cos^2(x^2)} - \frac{\sin(2x)\cos\left(x^2\right)\sin\left(\pi x^4\right)}{\cos^2(x^2)} +$

$\frac{x\sin\left(x^2\right)\sin\left(\pi x^4\right) + x\cos(2x)\sin\left(x^2\right)\sin\left(\pi x^4\right)}{\cos^2(x^2)} =$

$\frac{2\pi x^3 \cos(x^2)\cos(\pi x^4)}{\cos^2 x^2} + \frac{2\pi x^3 \cos(2x)\cos(x^2)\cos(\pi x^4)}{\cos^2 x^2} - \frac{\sin(2x)\cos(x^2)\sin(\pi x^4)}{\cos^2 x^2} +$
$\frac{x\sin(x^2)\sin(\pi x^4)}{\cos^2 x^2} + \frac{x\cos(2x)\sin(x^2)\sin(\pi x^4)}{\cos^2 x^2}$

(4) Responder para la siguiente función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$

(4.1) (**5**) Dominio y rango

RESPUESTA.

$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$.

(4.2) (**5**) Puntos críticos

RESPUESTA.

La derivada

$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^3 - 3x^2 - 12x) = 6x^2 - 6x - 12.$

Se iguala a cero, $6x^2 - 6x - 12 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, los factores son $(x+1)(x-2) = 0$. Por tanto los puntos críticos son $x = -1, x = 2$.

(4.3) (**5**) Puntos máximos y mínimos locales. Puntos de inflexión.

RESPUESTA.

La segunda derivada

$f''(x) = \frac{d}{dx}(6x^2 - 6x - 12) = 12x - 6.$

Como $f''(-1) = -18 < 0$, en$x = -1$,se tiene un máximo local.

Como $f''(2) = 18 > 0$, en$x = 2$, se tiene un mínimo local.

Tiene un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$, ya que $f''(\frac{1}{2}) = \frac{12}{2} - 6 = 0$ y $f'''(\frac{1}{2}) = 12 \neq 0$.

(4.4) (**5**) Zonas donde tenga inversa (zonas donde es creciente o decreciente)

RESPUESTA.

Con $x \in (-\infty, -1]$, $f'(x) > 0$, en esta zona la función f es creciente.

Con $x \in (-1, 2]$, $f'(x) < 0$, en esta zona la función f es decreciente.

Con $x \in (2, \infty)$, $f'(x) > 0$, en esta zona la función f es creciente.

Lo anterior se muestra en la gráfica de f.

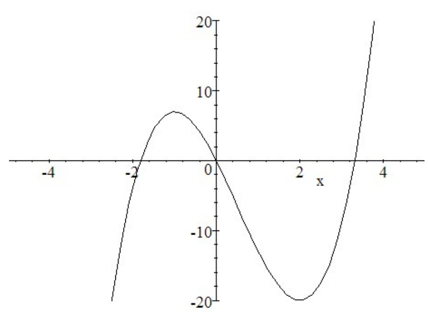

Figure 1: Gráfica de f

(5) Una escalera está apoyada en una pared a una altura de 2 metros y su extremo, que está en el piso a 2 metros de la pared, forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$rad, al ángulo en este punto le llamaremos θ. La tasa de cambio del ángulo en el vértice del piso de la escalera al deslizarse es constante con valor de $\frac{d}{dt}\theta = \frac{\pi}{8}$rad/s.

(5.a) (**10**) Encontrar las tasas de cambio de los puntos de contacto de la escalera al deslizarse sobre la pared (y) y sobre el piso (x), es decir, calcular $\frac{d}{dt}y$ y $\frac{d}{dt}x$ con sus respectivos signos de acuerdo a como se mueven dichos puntos.

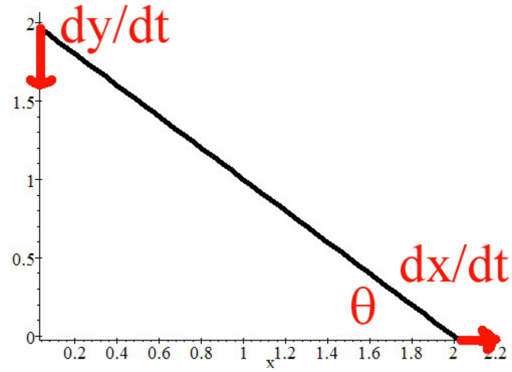

Figure 2: Gráfica de la posición inicial de la escalera

RESPUESTA.
Note que la diagonal corresponde a la longitud de la escalera, mide $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$.

1. Con θ entre el eje X y la escalera, se tiene

$\cos(\theta)=\frac{x}{\sqrt{8}}$, es decir $x=\sqrt{8}\cos\theta$
De forma similar, $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{8}}$ de donde $y=\sqrt{8}\sin\theta$.
Se derivan
$\frac{d}{dt}x=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{8}\cos\theta\right)=-\sqrt{8}\sin\theta\frac{d}{dt}\theta$
$\frac{d}{dt}y=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{8}\sin\theta\right)=\sqrt{8}\cos\frac{d}{dt}\theta$
Note que los signos son
$\frac{d}{dt}y=-\sqrt{8}\cos\theta\frac{d}{dt}\theta$ porque desciende hacia cero en el eje Y.
$\frac{d}{dt}x=\sqrt{8}\sin\theta\frac{d}{dt}\theta$, porque se aleja de cero en el eje X.
Sustituyendo (note que $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$):
$\frac{d}{dt}y=-\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{8}=-\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{16}}{16}\pi=-\frac{4}{16}\pi=-\frac{1}{4}\pi$, negativa porque desciende.
En forma similar:
$\frac{d}{dt}x=\sqrt{8}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{8}=\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{16}}{16}\pi=\frac{4}{16}\pi=\frac{1}{4}\pi$, positiva porque se aleja del origen.

(5.b) (**10**) Cuanto mide la escalera y cuanto tiempo tarda en deslizarse la escalera para quedar completamente sobre el piso, desde el ángulo dado $\theta=\frac{\pi}{4}$.
RESPUESTA.
La escalera mide $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$. Por formar un triángulo rectángulo con la pared.
Conociendo la velocidad de $\frac{d}{dt}\theta=\frac{\pi}{8}$ que es constante y que el ángulo a recorrer es $\theta=\frac{\pi}{4}$.
$\frac{d}{dt}\theta=\frac{\theta}{t}$, se despeja $t=\frac{\theta}{\frac{d}{dt}\theta}$. Sustituyendo $t=\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{8}}=2$.
El tiempo en caer al suelo de la escalera es de 2 seg.