SEGUNDO EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL
Trimestre 12-P. Junio 22 de 2012.

SOLUCION.
(1)(40). Para la función

$$g(x) = \frac{-x}{-x^2 + 2x - 4}.$$

Determine
a) Su dominio y rango.
RESPUESTA.
Como $-x^2 + 2x - 4 = 0$, no tiene raíces reales $x_1 = 1 - i\sqrt{3}, x_2 = 1 + i\sqrt{3}$
El dominio de g es $\mathbb{R}$
Su rango se da más abajo, en el inciso d).
b) Sus límite cuando $x \to -\infty$ y $x \to \infty$.
RESPUESTA.
$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{-x^2+2x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{x}{x^2}}{-\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{-1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = 0^-$
$\lim_{x\to\infty} \frac{-x}{-x^2+2x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{-1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = 0^+$
c) Sus puntos críticos.
RESPUESTA.
$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \frac{-x}{-x^2+2x-4} = -\frac{x^2-4}{(x^2-2x+4)^2}.$
Se iguala a cero, $-\frac{x^2-4}{(x^2-2x+4)^2} = 0$, de donde
$x^2 - 4 = 0$, los puntos críticos son las raíces y son $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.
d) Sus puntos máximos y mínimos locales y los valores de g en esos puntos.
RESPUESTA.
$\frac{d}{dx} g'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2-4}{(x^2-2x+4)^2}\right). = 2\frac{x^3-12x+8}{(x^2-2x+4)^3}.$
$g''(x) = 2\frac{x^3-12x+8}{(x^2-2x+4)^3}$
$g''(-2) = \frac{1}{36} > 0$, se tiene un mínimo en $x_1 = -2$, con $g(-2) = -\frac{1}{6}$
$g''(2) = -\frac{1}{4}$, se tiene un máximo en $x_2 = 2$,con $g(2) = \frac{1}{2}$.
El rango de g lo determina el mínimo y el máximo de g que es $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$.

(2)(40). Se desea construir un corral con una área rectangular de mayor tamaño. Se tienen 120 metros de alambre para cercar, y el corral debe estar formado con dos rectángulos de largo (l) y del mismo ancho (a), como se muestra en la figura:

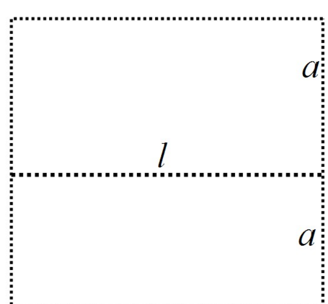

Figure 1: Gráfica de f

a) Escriba la fórmulas del área y del perímetro del corral a cercar.
RESPUESTA.
La fórmula del área total es $A(a,l)=2al$.
La fórmula del perímetro del corral es $120=3l+4a$.
b) Determine el área total del corral.
Se trata de determinar el área de mayor tamaño:
Del perímetro se tiene: $l=\frac{120-4a}{3}$,
El área como función de a es $A(a)=2a\frac{120-4a}{3}=2a\left(40-\frac{4}{3}a\right)$.
$A(a)=2a\left(40-\frac{4}{3}a\right)$.
$\frac{d}{da}A(a)=\frac{d}{da}\left(2a\left(40-\frac{4}{3}a\right)\right)=80-\frac{16}{3}a$.
El punto crítico se obtiene de $80-\frac{16}{3}a=0$, que es $a=15$.
Así el área total es
$A(15)=600$.
c) Determine las dimensiones (largo y ancho) de los rectángulos que lo forman, verifique que se usan los 120 metros de alambre para cercar.
RESPUESTA.
Sustituyendo a, se tiene $l=\frac{120-4(15)}{3}=20$.
El perímetro de la cerca es $3l+4a$, sustituyendo, $3\,(20)+4\,(15)=60+60=120$ metros.
d) Use el criterio de la segunda derivada para explicar si el problema tiene o no tiene solución.
RESPUESTA.
$\frac{d}{da}A'(a)=\frac{d}{da}\left(80-\frac{16}{3}a\right)=-\frac{16}{3}$.
Como $A''(15)=-\frac{16}{3}<0$, en $a=15$ se tiene un máximo, es decir el valor encontrado del área corresponde al corral de mayor área, como lo requiere el problema y este valor es la solución junto con $l=20$.

(3)(20). Determine cuantos ceros tiene la función $f\left(x\right)=x^3+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-8$ en el intervalo $[1,4]$.
a) Explique o justifique que hay al menos un cero en $[1,4]$, por los signos de los valores de f en 1 y 4.
RESPUESTA.
Note $f(1)\sim 6<0$ y en $f(4)\sim 55>0$.
Luego hay al menos un punto donde $f(x)=0$, con $x\in(1,4)$.
b) Explique o justifique que es único el cero de f con la primera derivada en $[1,4]$.
RESPUESTA.
$\frac{d}{dx}f\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(x^3+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-8\right)=3x^2-\frac{1}{4}\left(\sin\frac{1}{4}\pi x\right)\pi$,
$f'(x)=3x^2-\frac{1}{4}\left(\sin\frac{1}{4}\pi x\right)\pi$.
Se analiza el signo de f'.
$f'(1)=3-\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi\sim 2.4446>0$
$f'(4)=48>0$,
Note que f' es positiva en todo $x\in(1,4)$, luego la función es monótona creciente y por tanto solo cruza el eje X una sola vez, o sea f tiene un solo cero en $[1,4]$.